
BIBLIOTHECAE
ELECTORALIS
MONACENSIS.
Ch. Wink, del.
Söckler sc. 1779.

Ph. Malk. 2322-H.

Math. P. 221

Mathesis. Algebra specialis
Ars combinatoria & arithm. probab.

238 c.

R

ÜBER
COMBINATORISCHE ANALYSIS
UND
DERIVATIONS-CALCUL

EINIGE FRAGMENTE

GESAMMELT

UND ZUM DRUCK BEFÖRDERT

VON

CARL FRIEDRICH HINDENBURG.

Leipzig

im Schwickertschen Verlage. 1803.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Den beyden

französischen Bürgern

Christian Kramp

Professor der Chemie und Experimentalphysik bey der Centralschule zu Kölln

und

Iohann Carl Burckhardt

adjungirten Astronomen

bey dem Längen-Bureau zu Paris

wie auch

dem Professor der Philosophie

Heinrich August Rothe

zu Leipzig

den eifrigen Bearbeitern und Beförderern der combinatorischen Analysis

widmen

diese Sammlung

fragmentarischer

Aufsätze und Abhandlungen

zu Bezeugung

ihrer Freundschaft und Hochachtung

die Verfasser

Vorbericht des Herausgebers.

Die französischen Aufsätze, mit welchen diese Schrift beginnt, sind mir auf mein Ersuchen von ihrem Verfasser, dem Herrn Professor Bürmann zu Mannheim, zum Einrücken in die dritte Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen zugeschickt worden. Da die Ausfertigung der Sammlung voritzt nicht statt haben konnte, so folgen sie hier, um solche dem Publikum nicht länger vorzuenthalten, da sie schon seit geraumer Zeit in meinen Händen sind.

Bürmann's Vorhaben, die combinatorische Analysis den Ausländern bekannter zu machen und nachdrücklich zu empfehlen, ist den Lesern jener Sammlungen aus dem Vorberichte zur zweyten bereits bekannt. Die umständliche Ausführung desselben ist einem besondern Werke: *Traité d'Analyse fonctionnaire-combinatoire*, vorbehalten, welches sein Verfasser nun bald herauszugeben gedenkt, und wovon hier vorläufig eine ausführliche Inhaltsanzeige mitgetheilt worden ist. Diese, so wie die Aufsätze selbst (sämmtlich Bruchstücke des ebengenannten gröſsern

Werks) zeigen deutlich, was und wieviel man sich davon zu versprechen habe.

Bürmann's Empfehlung der combinatorischen Methode und ihrer Anwendung auf die Analysis ist von bedeutender Wichtigkeit. Dieser vortreffliche Analyst war nämlich anfangs ganz dawider eingenommen, und sahe die combinatorischen Darstellungen, in Beziehung auf die Analysis, für ein bloſses Spiel des Witzes an, mit welchem sich abzugeben der Mühe nicht lohne. Der Rath eines einsichtsvollen vertraulichen Freundes veranlaſste ihn in der Folge zu einer scharfen Prüfung; die Sache bestand diese Prüfung vollkommen; die Vorurtheile schwanden; die falschen Vorstellungen machten beſsern Überzeugungen Platz; und — was den Erfolg jener unpartheyischen Untersuchung von allen Seiten bestätigte und auf immer sicherte — Bürmann fand nachher oft Gelegenheit die Methode, bey seinen Vorlesungen praktisch zu prüfen, und ihren Werth und Nutzen durch wirkliche Anwendung zu bewähren. Von der Zeit an glaubte der biedere wackere Mann es der guten Sache schuldig zu seyn, zu schnellerer Bekanntmachung und weiterer Verbreitung dieses neuen Zweiges der Analysis, auch von seiner Seite, vornehmlich durch französische, im Auslande mehr gelesene, Aufsätze mitzuwirken.

Bürmann's innige, jedem Kenner sogleich einleuchtende, Bekanntschaft mit dem Gegenstande; sein philosophischer Überblick des Ganzen; die hin und wieder von ihm eingestreuten,

eben so wahr als shön ausgedrückten Bemerkungen, gereichen diesen, obschon fragmentarischen, Aufsätzen, zu vorzüglicher Empfehlung, und machen das Lesen und Studiren derselben anziehend und interessant. Die Hauptabsicht geht dahin: „Die Functionen - Analysis „mit der combinatorischen zu verschwis„tern, beyde in die engste Verbindung mit einan„der zu setzen, und dabey eine neue, äufserst „leichte, beyderley Functionen aufs deutlichste „von einander unterscheidende, Bezeichnung ein„zuführen.“ Es wird nicht überflüſsig seyn, einige zerstreute, diese verschwisternde Vereinigung betreffende, Aeuſserungen zu sammeln, und mit Bürmann's eigenen Worten, in einer freyen Übersetzung, hier aufzuführen:

„Die combinatorische Methode ist „eine der wenigen wahrhaft allgemeinen: aus „einer geringen Anzahl einfacher Voraussetzun„gen flieſst ein unerschöpflicher Reichthum nütz„licher Folgen. Ihr Einfluſs auf die Ana„lysis ist besonders wichtig, und erweitert ihren „Wirkungskreis ungemein. Die combinato„rische Analysis realisirt die Functionalaus„drücke auf die möglichst directe Art. Ohne „ihre Beyhülfe würden die groſsen weitläuftigen „Formeln der letztern nicht selten, den unge„heuern ägyptischen Pyramiden gleich, mehr „Anspruch auf unsere Bewunderung als auf un„sere Erkenntlichkeit machen; ohne sie würde „der Functionalcalcul ein Chaos von Reductio„nen darstellen, die auch den entschlossensten

„herzhaftesten Rechner ermüden würden. Die „Differential-Analysis, die seit länger als einem „Iahrhunderte so viele Wunder gewirkt und her„vorgebracht hat, führt geschwind zu Haupt„resultaten, welche die combinatorische hinter„her weiter bearbeitet und entwickelt. Daher „die Nothwendigkeit, beyde innigst mit einander „zu vereinigen; um so mehr, da ihre Trennung „der einem wie der andern nachtheilig ist. Nur „dadurch, daſs man beyde aufs vollkommenste „mit einander amalgamirt, kann man den groſsen „Methoden die Vollkommenheit geben, deren „sie fähig sind. Ohne diese Vereinigung gehen, „wie die Erfahrung lehrt, bey den Evolutionen „der Functionen in Reihen, und den Involutio„nen der Reihen in Functionen, das Gesetz der „allgemeinen und die Simplicität der summato„rischen Glieder gewöhnlich verlohren. Die ein„fache Darstellung dieser Glieder von oft sehr „verwickelten Reihen, gehört mit zu den Vor„zügen der combinatorischen Analysis. Bey dem „directen Wege, auf welchem sie zum Ziele „gelangt, sind ihre Verfahren nicht weniger „streng und analytisch als die der Differen„tialmethode. Zuweilen vervielfältigt sie die „Ansichten und Auflöſsungen, und stellt, in „schwierigen Fällen, mehrere schätzbare Hülfs„mittel auf, die dem Geiste, durch das Gefühl „seiner Kräfte belebt, den Muth einflöſsen, wei„ter zu forschen. Alles beruht dabey auf „den arithmographischen, lexikographi„schen, stelegraphischen Anordnungen;

„auf den — rein - combinatorischen Involutionen und Evolutionen. Diese geben „die Grundlage zu einer *Arithmétique universelle* „*ordinale*, zu einem *Calcul ordinal* — charakteristische Benennungen, die Bürmann der combinatorischen Analysis neuerlich beygelegt hat; „den Zusatz *ordinal* in der ausgedehntesten Bedeutung des Worts, als Beywort von *ordre*, „genommen. — Dadurch erhebt sich die combinatorische Methode mit ihren Ordnungsgesetzen zu dem Range einer independenten Wissenschaft, die aber gleichwohl, bey „aller Unabhängigkeit von der gewöhnlichen analytischen, ihr keineswegs fremd, sondern vielmehr „recht eigentlich dazu qualificirt ist, die engste „Verbindung mit ihr einzugehen. Alles löst „sich zuletzt in eine sprechende combinatorische Tachygraphie auf, wo das Auge „mit einem Überblick das Ganze mit allen seinen „Theilen faſst; der Erfolg einer ausdruckvollen „symbolisch - combinatorischen Zeichnung, die einem umständlichen verbalen „Vortrage allemal weit vorzuziehen ist."

So viel von Bürmann's Aeusserungen über die Vereinigung der Functionen - Analysis mit der combinatorischen. Anlangend die von ihm dabey einzuführende neue Bezeichnung, so muſs ich mich auf das in meinem Vorberichte zur zweiten Sammlung combinatorisch - analytischer Abhandlungen und noch ausführlicher hier in den Anmerkungen zu Bürmann's *Essai de caractéristique combinatoire* darüber Gesagte beru-

fen. Hier will ich nur so viel erinnern, daſs Bürmann für seine Zeichen eine solche Einrichtung zu treffen gesucht hat, daſs arithmetische, analytische, combinatorische, Ziffern und Zahlen oder Functionen, ohne Zweydeutigkeit und ohne besondere Nachweisung, im Calcul unter einander gemischt, leicht und sicher unterschieden, auch allen analytischen Operationen unterworfen werden können, und so combinatorische Evolutionen, Reversionen, Interpolationen, u. s. w. Differentiationen, Integrationen, sich darstellen lassen. Seine combinatorischen Zeichen z. B. sind sehr einfach und blos auf die beyden Formen ⌐¬ und [, mit ihren bestimmten Abzeichen für die nöthigen Modificationen (das erste für die Sätze, das zweyte für ihre combinatorische Bearbeitung) eingeschränkt. Von diesen Zeichen kommt in den Abhandlungen hier nichts vor, weil sie sich mit ihren Abzeichen durch gewöhnliche Typen nicht darstellen lieſsen; auch muſs man nicht vergessen, was Bürmann am Schlusse seines *Polynome-Combinatoire* selbst erinnert, daſs das, was hier im Drucke an ihrer Stelle steht, nur ein höchst unvollkommenes Surrogat sey, das sich mit jenen viel vollkommnern Zeichen gar nicht messen darf. Inzwischen ist zu rathen, beym Lesen des *Polynome* sich anfänglich die Zeichen und ihre Bedeutungen, so wie sie nach und nach vorkommen, auf ein besonderes Blatt aufzuschreiben, um sie sogleich in der Folge, wo sie

wieder erscheinen, richtig verstehen und auslegen zu können. Etwas Aehnliches gilt von den combinatorischen Operationen und Involutionen, die man am besten mit der Feder in der Hand verfolgt. Das aufmerksame Abschreiben und Wiederholen einiger gut gewählten Beyspiele, sagt BÜRMANN, machen mit den combinatorischen ganz einfachen Regeln und Verfahren weit schneller vertraut, als wenn man es blos bey den verbalen, noch so aufmerksam durchlesenen, Vorschriften bewenden läſst. Man wird wohl thun, wenn man diese praktische Übung bald in Zahlen, bald in Buchstaben, versucht. Eine geringe Aufmerksamkeit bey einer mehrmaligen Handanlegung, wird die Regeln, oft ohne alle wörtliche Nachweisung, die, um bestimmt zu seyn, nicht immer kurz seyn können, leicht finden lassen. Es ist eine schöne Eigenschaft der combinatorischen Analysis, setzt dieser vortrefliche Beobachter hinzu, aus bloſsen combinatorischen Entwürfen und ihrer Anordnung in Tafeln, durch bloſse anschauliche Darstellung ihrer Ordnungsgesetze, sich selbst zu lehren.

Meine Anmerkungen zu dem *Essai de caractéristique combinatoire* sind theils erläuternd, theils geben sie weitere Nachweisungen, zuweilen selbst aus BÜRMANN's Briefen. Manches daraus kann auch als Nachweisung beym *Polynome-Combinatoire* gebraucht werden, z. B. wenn man etwas ausführlicher zu wissen verlangte, was es mit der *Involution Lexicographique* (Seite 94) mit der *Involution literale directe*

(S. 96) mit der *Involution permutée* (S. 99) für Bewandnis habe; wo man die in meinen Anmerkungen dafür citirten Stellen leicht finden und nachschlagen könnte. BÜRMANN durfte in diesen Aufsätzen nach seinem Plane nicht anders als kurz seyn und konnte sich daher auf eine detaillirte Auseinandersetzung solcher combinatorischer Formen nicht einlassen. Freylich sollten diese Anmerkungen, wie der Aufsatz zu dem sie gehören, französisch geschrieben seyn. Wenn man aber die Schwierigkeiten nicht verkennen kann, die jeden Vortrag in einer fremden Sprache begleiten, in welcher man sich die gehörige Fertigkeit, durch lange anhaltende Übung nicht erworben hat: so wird man es gewifs verzeihlich finden, dafs es in gegenwärtigem Falle, und bey einem solchen Texte, nicht geschehen ist.

So viel, von BÜRMANN's Aufsätzen und ihren Verhalten zu seinem gröfsern *Traité d'Analyse fonctionnaire-combinatoire*, der gröfstentheils den Reihen und ihrer verbesserten Behandlung gewidmet ist.

Einen ähnlichen Vorsatz, durch Erweiterung der Theorie der Functionen und des Differentialcalculs die Analysis der Reihen zu vervollkommnen, insbesondere schwere Untersuchungen verwickelter Gegenstände zu erleichtern, weitläuftige, nicht selten sehr beschwerliche dabey vorkommende Operationen und Rechnungen abzukürzen, und verschiedene Zweige der Analysis mit einander in nähere Verbindung zu bringen, hat ARBOGAST, Mitglied des französischen

Nationalinstituts und Professor der Mathematik zu Strasburg, ohnlängst ausgeführt. Dabey hat er einen eigenen, von allen bisher bekannten ganz verschiedenen, Weg eingeschlagen; wie aus seinem neuerlich (1800) zu Strasburg herausgegebenen schätzbaren und interessanten Werke: *Du Calcul des Dérivations* erhellet. Seine Rechnungsmethode gründet sich auf die durchgängige Voraussetzung, zusammengehörige Gröſsen als von einander derivirend zu betrachten; wobey er zugleich den Begriff von analytischer Derivation erweitert und ihn auf jede willkührlichen, von einander ganz unabhängigen, Gröſsen a, b, c, d, . . . (dergleichen die Coefficienten der Glieder der Reihen darstellen) und ihre verschiedene Zusammensetzung erstreckt, auch solche als veränderlich und von einander derivirend angesehen hat, so unabhängig von einander sie übrigens an sich seyn mögen.

Wie dabey die Glieder der entwickelten Functionen von einander abgeleitet werden; wie z. B. bey Evolution der Function

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})$$

(wo offenbar das erste Glied $= \varphi\alpha$) die Coefficienten der übrigen, in zusammengesetzten derivirten Gröſsen (*Derivées*) von $\varphi\alpha$; und diese wieder in einfache von $\varphi\alpha$ und zusammengesetzte von β, β^2, β^3. . . sich zerlegen; die letztern aber endlich in die ganz einfachen β, γ, δ, ε... und ihre Zusammensetzungen sich auflöſsen lassen; — dafür will ich das in meinem Aufsatze (hier No. V) darüber Gesagte itzt nicht wieder-

holen. Bürmann's consecutiv Functionen f^1, f^2, ... f^n, sind ungefähr das, was Arbogast 1ste, 2te,... nte Derivirte nennt.

Die Evolution der Functionen in Reihen macht die Grundlage des ganzen Werks aus. Der Ursprung und die Anwendung der Derivationen zeigt sich hier am deutlichsten; einzelne Formeln und Sätze davon finden in der Folge durchgängig ihre Anwendung; auch fällt, worinn die combinatorischen und derivativen Verfahren von einander verschieden sind, worinn sie mit einander übereintreffen, nirgends so klar als hier in die Augen. Ein grofser Theil meiner Abhandlung ist daher mit Vergleichung der beyderley Methoden beschäftigt. Die dabey vorkommenden derivativen Zeichen habe ich erklärt, die combinatorischen aber als bekannt vorausgesetzt, um so mehr, da selbige schon vorher von Bürmann, in seinen Noten zu seinem *Polynome-Combinatoire* aufgeführt und mit den seinigen verglichen worden sind.

Der Derivationscalcul als allgemeine, die Theorie der Functionen (mit welcher er in der innigsten Verbindung steht) so wie die Gränzen der Differentialrechnung (deren er sich als Instrument bedient) erweiternde Methode, ist vortrefflich und vielumfassend; die Anwendung dieses Calculs auf mehrere interessante und schwierige Untersuchungen, seine Erstreckung auf Functionen zusammengesetzter Polynomien ist wichtig; — Alles qualificirt das Werk zu einem

ernstlichen Studium jedes Analysten, dem die Erweiterung seiner Wissenschaft am Herzen liegt.

Wenn aber der scharfsinnige, gelehrte und belesene Verfasser desselben, neben dem Lobe, das er der combinatorisch-analytischen Methode in der Vorrede ertheilt, nicht undeutlich zu verstehen giebt, er habe durch den Derivationscalcul die combinatorische Analysis entbehrlich gemacht; wie aus den Worten folgender Stellen — *Les quantités polynomiales peuvent aussi se former par les combinaisons, quoique d'une façon moins facile et moins analytique, que par les Dérivations (Calc. des Dér. p. 4?. no. 52)* — *Je n'ai fait aucun usage des combinaisons* — *j'ai suivi mes propres idées* — *les principes que j'emplois sont plus étendus* — *les procédés que je donne sont plus analytiques*, u. s. w. bis zu den Worten *pour former les groupes des quantités polynomiales (Préf. p. V. VI)* — deutlich hervorgeht: so ist das eine stillschweigende Behauptung, welcher ich laut widersprechen mufs. Der Derivationscalcul hebt den wichtigen nützlichen Gebrauch der combinatorischen Methode in der Analysis so wenig auf, dafs er ihn vielmehr nachdrücklichst bestätiget.

Wenn man, um ein sehr einleuchtendes Beyspiel zu geben, das ARBOGASTISCHE Evolutionsverfahren Schritt für Schritt verfolgt, so geht am Ende folgendes Resultat unwidersprechlich hervor:

„Der Derivationscalcul führt anfänglich zu „beschwerlichen continuirlichen Differentiationen

„und Reductionen; wie die Formeln [*Calc. des* „*Dér.* no. 5. 7 und 20, 21] mit ihren Anwendun„gen [no. 12, 14, 16] zeigen, und ARBOGAST „[no. 19] selbst gesteht. Statt dieser werden in der „Folge zwar leichte, dennoch aber in Weitläuf„tigkeit führende Substitutionen in Substitutio„nen (durch successive Entwickelung der Deri„virten von β^m zu Derivirten von γ und deren „Potenzen, dieser wieder zu Derivirten von δ „und deren Potenzen, u. s. f. bis der derivative „Charakter D aus allen Gliedern verschwunden „ist) gebraucht [no. 22, 25 und p. 20, 21]; Sub„stitutionen, deren sich der Conferenzrath TE„TENS bereits bedient hat (hier S. 230-235). Diese „Derivationen lösen sich zuletzt in ganz leichte „und einfache combinatorische Operatio„nen und Involutionen auf; dahin z. B. die „*Règles* [no. 30, 36, 43, 47] gehören, aus de„nen vollkommen reducirte gutgeord„nete Complexionen, in eben der Folge auf ein„ander, wie bey mir, hervorgehen [die *Dévelop*„*pemens réduits*, p. 21]. Die analytischen „Derivationen führen also hier (und eben so „auch bey den Producten der Reihen und „andern Fällen), ganz unerwartet auf com„binatorische Anordnungen und Verfah„ren. Diese sind also unentbehrlich, will man „anders die endlichen Resultate mit absoluter „Leichtigkeit herbeyführen. Merkwürdig ist es „übrigens, daſs man auf sie geleitet wird, indem „man die Schwierigkeiten, welche die derivati„ven Ausdrücke und Verfahren bey den *quantités*

„*polynomiales* in den Weg legen, zu heben sucht, „und indem man, was diese noch eingewickelt „enthalten, nach und nach entwickelt.“

Das Verfahren [no. 21] zeigt die Abhängigkeit der dortigen Evolutionsformel von dem polynomischen Lehrsatze. Nachdem nun für die Glieder dieses Satzes die derivativen oder meine combinatorischen Ausdrücke gebraucht werden, nachdem ist auch jene Formel im Ausdrucke verschieden. Begreiflich hat Arbogast seine derivativen Functionen substituirt; aber hoffentlich wird man keinen Augenblick anstehen, die geschmeidigere combinatorische Formel (hier S. 203) im Gebrauche vorzuziehen.

Die combinatorischen Operationen und Involutionen sind überdies, wie ohne Schwierigkeit von selbst einleuchtet, wahre Derivationen, im strengsten Sinne des Worts, die, wie die analytischen, von einem bestimmten Anfange (*Origine*) ausgehen; aber Derivationen der einfachsten Art. Wenn man nämlich in einem analytischen Ausdrucke oder Satze alles entwickelt, auflöst, und vereinfacht, was sich entwickeln, auflösen und vereinfachen läſst: so verfällt man zuletzt nicht selten auf ganz simple, gewöhnlich combinatorische, Anordnungen und Derivationen; und das um so leichter und zuverlässiger, wenn man etwa zufälligerweise eine der (hier, S. 189, 190, Note o) erwähnten, dahin führenden, Zeichnungen, besonders die bezifferte, gebraucht hätte, deren sich vorlängst mehrere Analysten bedient

haben, ohne den Übergang zu kennen, oder auch nur zu ahnden, der von hier aus in die combinatorischen Anordnungen offen steht. Was Prof. Pfaff (Arch. der Math. H. VII. S. 348) von dem Tetenschen Substitutionsverfahren sagt, es involvire etwas, den beym Combiniren erforderlichen Operationen Ähnliches, das erst noch weiter evolvirt werden müsse; das wird durch die analytischen Derivationen vollkommen bestätiget. Das letzte Resultat derselben (die *Développemens réduits*) sind combinatorische Derivationen in aller Form. Auf diese geräth die derivative Methode nur allmälig und auf Umwegen; die combinatorische bemächtigt sich ihrer auf dem kürzesten ganz directen Wege.

So weit auch Arbogast das Gebiet seiner Derivationen erstreckt und ausgedehnt, und sich dadurch ein gegründetes Recht auf den Dank aller Analysten erworben hat: so wird es doch immer, wie bey den, in meiner Abhandlung in Betrachtung gezogenen, so auch in andern Fällen, Bedürfnifs bleiben, für die analytischen verwickelten Derivationen, die correspondirenden combinatorischen leichtern aufzusuchen und in Formeln darzustellen, deren lichtvolle symbolische Zeichnung allemal mehr Deutlichkeit haben wird, als die verbalen Vorträge der Regeln für jene nicht haben können. Wie die Differentialanalysis, nach Bürmann's obiger Bemerkung, zu Hauptresultaten führt, welche die combinatorische nachher weiter bearbeitet und entwickelt;

so auch der Derivationscalcul, eine erweiterte Anwendung der Differentialrechnung. Die analytischen Derivationen sind, wie die Vergleichung zeigt, combinatorischer Art (*Combinaisons latentes*). Arbogast hat nämlich in seinem derivativen Verfahren, ohne vielleicht daran zu denken, eine vielbefaſſende, auf den Differentialcalcul gegründete, und dadurch mit der Theorie der Functionen zusammenhängende, Combinatorik aufgestellt. Vortreſſlich zeigt diese den Weg, auf welchem man die Untersuchungen einleiten und zu Endresultaten gelangen kann. Aber auf jenem durch labyrinthische Gänge oft so sehr verflochtenen Wege, bey diesen nicht selten äuſserst verwickelten Resultaten, werden, um jenen zu verfolgen und diese zu realisiren, combinatorische Wegweiser und Vermittler der einfachsten Art, wenn man sie haben kann, theils als sicheres Geleite zu beſſerm Fortkommen, theils als erwünschte Abkürzung und Vereinfachung, allemal von gröſstem Nutzen seyn.

Wenn nun aber die Derivationsmethode der Beyhülfe der combinatorischen, ohne Unbequemlichkeit, nicht entbehren kann; wenn selbst letztere die geschwindere Übersicht der erstern ungemein befördert, und zu deutlicherer Einsicht in ihre Verfahren verhilft, wie jeder zugeben wird, den die Erfahrung darüber belehrt hat; so ist klar, was ich oben behauptet habe: „daſs der „Derivationscalcul die combinatorische Analysis, „mit ihren Involutionen und Evolutionen, so we-„nig entbehrlich macht, daſs er vielmehr ihren

„herrlichen Nutzen aufs neue kräftigst bestätigt.“ Den Einfluſs der, in ihren Gründen so einfachen, in ihrer Anwendung so leichten, Combinationslehre auf die Analysis wieder aufheben; die bereits getroffene so wohlthätige innige Vereinigung beyder, nach welcher jene dieser, von ihren ersten Anfängen an bis in die gröſsten Verwickelungen hinein, schwesterlich zur Seite geht, und ihr hülfreich die Hand bietet — diesen Einfluſs wieder aufheben, diese Vereinigung wieder trennen wollen — das hieſse, eine der lautersten, ergiebigsten Hülfsquellen für die Analysis vorsetzlich verstopfen, und in sehr vielen Fällen den kürzesten, nur allein durch directe combinatorische Verfahren (*Combinaisons manifestes*) zugänglichen Weg sich verschlieſsen.

Nicht also die Trennung der combinatorischen Methode von der differentiellen und derivativen, sondern vielmehr ihre möglichst genaue und innige Vereinigung, kann der Analysis wahrhaft nützlich seyn und ihre Gränzen erweitern. Diese Vereinigung beabsichtigt Bürmann's *Traité d'Analyse fonctionnaire - combinatoire*, nach der ausdrücklichen Erklärung die dieser scharfsinnige Analyst gleich zu Anfange seines *Développement général aux Fonctions arbitraires* (hier No. II) darüber gegeben hat.

Leipzig im April 1803.

Carl Friedrich Hindenburg.

I.

ESSAI

DE

CARACTÉRISTIQUE COMBINATOIRE

OU

NOTATION UNIVERSELLE DÉDUITE D'ÉLÉMENS SIMPLES SYSTÉMATIQUEMENT COMBINÉS.

. ambagesque resolvit
Caeca regens filo vestigia
Enéide, chant VI.

PAR BURMANE.

PRÉFACE.

Cet opuscule a pour but de rendre la communication des idées plus rapide et plus générale. S'il produit seulement des recherches dans une partie assez neuve encore, l'Art de la Notation, je ne regretterai pas les années, que j'ai employées à des pages.

Le titre que j'ai adopté est celui que LEIBNITZ [1]) donnait à un algèbre de raisonnement dont il parla toujours et ne publia rien. Ma Caractéristique, moins étendue en plan que celle de cet homme illustre, n'a point la métaphysique pour base: mais comme écriture immédiate des sciences du géomètre et du grammairien philosophe, elle est aussi une langue universelle, ou susceptible de le devenir. Elle se distingue de la Pasigraphie parisienne par son économie mathématique non moins que par sa brièveté.

Ses élémens graphiques sont . — | / \ () ⌒ ⌣

1) Les Notes du Texte se trouvent amassées séparément au Nro. IV.

Rendre saillantes les nombreuses parties de la Caractéristique sans qu'elles cessent de faire un tout contenu, assigner à chaque chose un signe simple sans tomber dans la repétition, embrasser les bésoins présens et futurs, ne pas sacrifier l'élégance des formes à leur facilité pratique; ces points de mire si différens ont rendu ma carrière trop difficile pour que je n'y ai pas trébuché. J'en invoque l'indulgence des connaisseurs sur des imperfections inévitables peut-être pour de plus habiles que moi, et je les prie de ne juger qu'un Essai.

Oserai-je compter généralement sur une lecture attentive? Je ne l'éspère pas de ceux qui ne parcourent les livres que pour en rélever les endroits faibles et qui croyent mieux mériter du public en se moquant de tout projet utile qu'en contribuant à son exécution. La meilleure manière de critiquer ici et partout est de fournir des améliorations et de proposer des vues nouvelles: celle-la seule obtient la reconnaissance de la postérité qui ensevelit dans l'oubli ou le mépris les censures stériles et leurs auteurs.

Fontenelle dit au sujet de la Caractéristique de Leibnitz qu'outre l'art de la trouver, il eût encore fallu le plus difficile de la faire recevoir, les hommes ne s'accordant qu'à n'entendre point leurs intérets communs. Ces obstacles sont grands mais l'existence de l'Arithmétique, de l'Algèbre, de la Musique et de l'écriture chinoise prouve qu'ils ne sont pas invincibles. J'y appelle les efforts des jeunes savans dont le courage ne fixe que le terme et dont l'esprit n'est pas encore courbé sous le joug de l'habitudé. Dans l'age mûr, je le sens trop par moi-même, ce qu'on sait est toujours préférable à ce qu'il faut apprendre, fût-il au fond cent fois plus aisé.

TABLE DES MATIÈRES

Première Partie

en impression avec deux planches.

PROLEGOMÈNES DE CARACTÉRISTIQUE.

1re Section. Sur les chiffres, écriture de l'Arithmétique.

2de — Sur les notes, écriture de la Musique.

3me — Sur l'Algèbre, écriture de l'Analyse mathématique.

4me — Sur les figures de la Géomètrie et de la Méchanique.

5me — Sur la Science des Combinaisons appliquée aux mathématiques. [2])

6me — Sur la même appliquée aux autres sciences par l'Idéographie.

7me — Sur les caractères plus ou moins arbitraires de la Géographie, de l'Astronomie, et de la Chymie, sur ceux de la Tactique et de la Danse, sur le télégraphe et les signaux en général.

Seconde Partie

toute gravée.

NOTATION COMBINATOIRE.

1re Section. Principes généraux d'Algèbre. [3])

2de — Application aux Différences directes et inverses.

3me — Application aux Différences nulles ou différentielles.

4me — Application aux Intégrales différentielles de tous les ordres, simples et partielles.

5me — Application aux Sommations conversionelles.

6me Section. Application aux équations fonctionnaires.
7me — Application aux formules de Méchanique en signes permanens.
8me — Plan général d'une Idéographie universelle, médiatement et immédiatement parlable.

Troisième Partie

en impression avec plusieurs planches.

MêLANGES

1re Section. Résolution numérique (praticable) des équations de toute espèce.
2de — Remarque sur les parties précédentes et additions.
3me — Instruction pour graver bientôt l'écriture à l'eau forte, seul moyen de perfectionner la Caractéristique combinatoire.
Planches. Figures combinatoires et autres. Modèles des instrumens et apparaux du graveur à l'eau forte. Modèles droits et renversés d'écriture anglo-française et d'allemande, tant courante que gothique, etc.

A) PREMIERE PARTIE

Section cinquième.

Sur la Science Combinatoire appliquée aux mathématiques et réduite en règles techniques au moyen de l'Analyse Combinatoire.

Quoique la Géométrie, l'Analyse et la Méchanique ayent, dans la contemplation de la vérité, une beauté intrinsèque qui en rend l'étude recommandable indépendamment de leur utilité pratique, il n'en est pas moins vrai que ce dernier but doit être celui de tout géomètre spéculateur, Les mathématiques sont assez avancées, mais non leurs applications, disait un philosophe spirituel du dernier siècle. Sa remarque est juste à cela près que les applications demeureront toujours bornées tant que les méthodes ne seront point parfaitement générales et leurs énoncés des formes simples et parlantes, Cette réduction analytico-caractéristique peut seule convertir en règles techniques l'art d'inventer, et mettre pour ainsi dire, le génie à la portée de la multitude.

A mésure que le géomètre physicien attaque des problèmes plus importans, la complication des développemens augmenta davantage, au point souvent de rendre la solution finale impossible. Pour éluder cet obstacle invincible directement, la sagacité mathématique a successivement inventé divers modes abbréviatoires: tel est en gros le calcul différentiel et en particulier la notation plus ou moins féconde de certaines fonctions consécutives. Mais osons le dire, cette tachygraphie algébrique ne devient universellement utile qu'a l'aide de l'Analyse Combinatoire qui réalise de la manière la plus directe les énoncés fonctionnaires. Sans elle les grandes

formules sont trop souvent dans le cas des pyramides égyptiennes, des monumens prodigieux qui ont plus de droit à l'admiration qu'à la reconnaissance.

Si un art date de ses premiers essais, l'Analyse Combinatoire est ancienne: si, comme il est plus naturel, on fixe son origine à l'époque où elle a commencé de devenir un systême, on ne peut pas remonter plus haut qu'à Leibnitz. Ce génie transcendant, à qui nous devons tant de grandes vues, tenta le premier d'en faire une science et même une science universelle. Pour avoir trop étendu son plan, le philosophe allemand occupé d'ailleurs d'une foule d'autres objets, ne fit que peu de progrès dans sa Combinatoire et ne vit même qu'un abyme dans une de ses principales opérations, la décomposition d'un nombre en toutes ses parties entières. [4]) Il défricha le champ et c'est beaucoup. Les heureuses idées qu'il séma fructifièrent sous de géomètres plus modérés. Bernoulli, Moivre, Boscowich, etc. débrouillèrent le cahos et l'abyme disparut. Mais personne n'a autant mérité ici que le Professeur Hindenbourg à Leipsic; en convertissaut les procédés combinatoires en règles techniques aussi précises et même plus faciles que celle de l'arithmétique vulgaire, en les illustrant par de nombreuses applications, et en formant une quantité de disciples distingués, ce profond géomètre doit être regardé comme le vrai père de l'Analyse Combinatoire.

En glanant sur ses pas je n'ai guère trouvé que la forme à perfectionner, ou pour mieux dire, à traduire en faveur de ceux qui n'ont point l'usage des lettres allemandes auxquelles nécessitèrent la multitude des élémens et l'impression commune. Ma notation nouvelle a sous ce rapport au moins l'approbation de Hindenbourg lui-même. Voyez sa Zweite Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlun-

gen, Leipsic, 1800. [5]) Comme la manière dont je suis venu à ce travail peut intéresser la science en montrant combien il faut être sur ses gardes lorsqu'on juge des méthodes qu'on ne connaît qu'imparfaitement, je me permettrai quelque détail.

Ainsi que beaucoup de géomètres j'eûs longtems pour l'Analyse Combinatoire allemande une aversion qui alla jusqu'à n'en vouloir lire aucun ouvrage. [6]) Sur le conseil d'un savant ami je me familiarisai enfin avec elle et vis à ma surprise que j'avais eu tort de la mépriser sur la foi d'autrui. Pour réparer ma faute et guerir d'autres de la même prévention, je resolus d'écrire des Elémens Combinatoires français. [7]) Je m'ouvris à ce sujet il y a quelques années au Professeur Hindenbourg qui s'empressa avec une complaisance vraiment rare de m'aider de ses lumières. Dans une correspondance suivie que nous eûmes ensemble il me donna des renseignemens précieux sur sa méthode et sur les meilleurs ouvrages combinatoires, et il y joignit la politesse de m'en envoyer une grande partie: il fit plus, il me redressa amicalement plusieurs méprises, et c'est à sa judicieuse censure que je dois des progrès que je puis avoir faits dans la Science des Combinaisons, dont cette Caractéristique n'est pas le seul résultat. Je me plais à lui en exprimer ici ma reconnaissance publique.

Mon illustre correspondant ne goûta pas tout de suite mon projet d'une notation sans lettres allemandes trop peu connues, à l'avis de plusieurs savans respectables, en France et dans tout le midi de l'Europe. Même en Angleterre et en Batavie, l'Alphabet gothique (Black Letter) confiné aux estampes et à quelques livres de réligion, diffère assez de l'imprimé allemand pour que celui ci n'y soit pas d'une lecture aisée. Une circonspection nécecsaire dans les correspondances des gens de lettres m'ayant empeché de donner à mes raisons

tout le poids que j'aurais pû, je ne m'étonne aucunement qu'elles n'ayent pas convaincu Hindenbourg. Encore dans le livre cité il parait douter à son désavantage que la notation n'ait empêché son élégante méthode d'être étudiée des étrangers autant qu'elle le mérite, et il cite contre moi le grand Euler [8]) dont les ouvrages classiques pleins de lettres allemandes doivent les avoir rendues familières aux géomètres meridionnaux. Mais en admettant, ce qui est beaucoup, cette supposition en entier, la simple lecture n'aura pas appris à tracer des caractères très difficiles par les bouts brisés des minuscules et les ornemens sinueux des majuscules qu'un français ou un italien ne sait point distinguer de la lettre proprement dite. Excepté les maîtres écrivains les allemands eux mêmes ne savent pas exécuter ce type d'impression dit Fractur: s'ils y suppléent par une main courante commode, les étrangers, privés de cette ressource, n'ont que la très précaire de se créer de signes particuliers. Or je sais par expérience combien cette difficulté dégoûte, et c'est pour la lever en général que j'ai entrepris cette Caractéristique Combinatoire dont le but, ou du moins le voeu, est d'universaliser les connoissances européennes en facilitant leur communication immédiate.

La guerre et des circonstances qui n'intéressent que moi seul, ont interrompu ma correspondance avec Hindenbourg et m'ont fait remettre à des tems plus heureux pour les sciences la publication du Traité d'Analyse Combinatoire pour lequel j'ai travaillé des matériaux. Je me borne ici à essayer le gout du public mathématicien par des élémens proportionnés aux autres parties de ma Caractéristique et suffisans pourtant pour familiariser avec la méthode: ils contiennent [9])

1. La combinaison arithmétique des séries, laquelle construit pour un problême quelconque de déve-

loppement la Norme du terme-général, c'est à dire l'énoncé tachygraphique des règles combinatoires fondamentales dont le résultat exprime le terme général dans toute la simplicité possible.

2. La démonstration courte et rigoureuse des règles combinatoires fondamentales, avec des applications choisies qu'il suffit de copier quelques fois pour avoir la routine de ces règles.

3. Le Polynome-Combinatoire (Polynomial-Satz) [10]) ce superbe théorême, du à Hindenbourg, est comme l'a très bien remarqué le savant Professeur Klügel, une espèce d'observatoire d'où le calculateur suit, au loin, sans jamais là perdre, la loi des dévéloppemens et renveloppemens.

4. Involutions lexicographiques appliquées aux Retours des séries, au logarithme naturel de l'infinitinome et au nombre dont l'infinitinome est le logarithme; détermination médiate et immédiate du terme général d'une suite récurrente donnée.

5. Application à quelques uns de nos énoncés différentiels, etc.

6. (Dans la troisième partie de cette Caractéristique) Notice de travaux combinatoires de Hindenbourg, Eschenbach, Rothe, Burckhard, Prasse, Kramp, des frères Pfaff, etc., etc. [11]). Table comparative des signes combinatoires allemans et des miens, [12]) en faveur de ceux qui auront appris l'Analyse Combinatoire dans ma notation. Quand on est au fait du fond, on l'est bientôt de chaque nouvelle forme.

J'ai exposé les raisons qui m'ont empêché d'admettre les lettres allemandes: elles n'auraient d'ailleurs osé trouver place dans une Caractéristique sans lettres proprement dites. Mais tout en m'écartant de la notation de Hindenbourg, je lui dois l'éloge qu'elle est ce qu'on saurait construire de plus méthodique avec les alphabets.

Les avantages de la mienne dérivent absolument de la pleine liberté que j'ai eue en fait de signes, moyennant quoi j'ai pû rendre les termes généraux combinatoires avec plus d'unité et mieux les distinguer des fonctions analytiques ordinaires avec les quelles on peut les mêler sans équivoque. [13]) Deux symboles, ⌐ pour les énoncés et [pour les règles combinatoires, remplacent à l'aide des chiffres algébriques V X Λ et de quelques modifications locales, les dix alphabets de la notation allemande. [14]) Par une suite de mes principes caractéristiques la terminologie a essuyé la même réduction.

Malgré cette simplification je suis loin de croire que ma notation abolira son modèle, même dans la supposition qu'un éditeur en fit exécuter des types mobiles. Dans l'empire des lettres les révolutions sont rares et surtout lentes en matière de forme. Les plus mauvaises orthographes, par exemple l'anglaise et la française, ont résisté à tous les projets par leur seule force d'inertie, c'est à dire parce qu'on y est une fois accoutûmé. A plus forte raison un système savamment régulier en types existans, se soutiendra - t - il dans les pays où il est reçu. Tout ce qui pourra arriver sera que ma notation subsiste à côté de l'allemande, [15]) si tant est qu'on l'adopte. Le $\dot{x}$ de Newton n'a nulle part dépossédé le *dx* de Leibnitz moins élégant peut - être. Si en Angleterre, où le patriotisme s'étend trop souvent jusqu'aux sciences, on préfère le symbole Newtonien, la France, l'Italie, l'Espagne, l'Allemagne et le Nord se sont déclarés pour Leibnitz, leur maître commun en calcul différentiel. En Batavie où les muses sont cosmopolites comme le commerce, l'une et l'autre notation sont en usage et on s'en trouve bien. Il est bon peut-être aujourd'hui de différer, peut-être même de disputer sur ces accessoires; s'entend de manière que

le public en retire de l'utilité et que les parties ne sortent point de l'urbanité philantropique, qui doit caractériser les lettres. Sous ce point de vue ma notation pourra aussi en Allemagne propager le goût de l'Analyse Combinatoire. On comparera, on scrutera, et les nouvelles idées qui en resulteront, tourneront au profit de la science et à l'honneur des inventeurs. *Fungar vice cotis.*

Mes formes combinatoires étant, comme mes formes algébriques ordinaires, toutes en lignes droites assemblées sous les angles les plus simples, elles exigent de même peu de dextérité manuelle, et leur construction sévèrement méthodique qui les rapproche des fonctions communes sans qu'on puisse jamais les confondre avec elles, n'oblige à aucun effort de mémoire et d'attention. C'est pour soulager encore plus celles-ci que j'ai abandonné les nombreuses dénominations de LEIBNITZ et de BERNOULLI. [16]). Les amateurs d'érudition pouvant recourir aux sources, n'ont pas á s'en pleindre et les commençans m'en sauront certainement gré. Dans l'étendue actuelle de l'Analyse et des sciences en général, on ne peut trop réduire pour eux. Au reste je n'ai constamment substitué que des mots plus intelligibles immédiatement et j'ai soigneusement évité d'en employer aucun dans un sens différent de mes prédécesseurs. Avec cette précaution il n'y a pas de confusion à craindre. Je passe à des considérations moins stériles.

L'Analyse Combinatoire ne s'exerce que sur les développemens. C'est à dire sur les séries: mais le domaine de celui-ci est bien plus étendu qu'il ne parait au premier abord et presque tout s'y rapporte. Excepté quelques fractions simples, les autres ne s'employent qu'en développement. Il y a plus, en Arithmétique même tout est série. Les nombres entiers sont des séries or-

données selon les puissances de dix, [17]) une fraction est une série pareille d'une partie de l'unité. Les règles arithmétiques fondamentales n'étant que la numération considérée sous diverses faces, ne sont donc que l'art de trouver le séries décimales entières ou fractionnaires qui résultent de compositions et de decompositions prescrites de séries de même espèce.

L'Analyse algébrique est la logique qui conclut les procédés propres à déterminer une quantité au moyen d'autres, liées par certaines conditions. En Arithmétique ces procédés sont l'addition, la soustraction et leurs repétés; en Géomètrie ce sont des lignes, des surfaces, des solides à construire; en Méchanique il y entre de plus le tems, le mouvement et ses conséquences. Les autres sciences mathématiques ne sont que des applications de celle-là: l'Analyse est le guide de toutes et l'Algèbre est leur écriture commune. Quelques ſymboles qu'on employe pour la Norme des opérations techniques qui résolvent le problême, chiffres, lettres, figures réelles ou de convention, cette norme sera dans notre sens toujours de l'Algèbre: [18]) mais une tachygraphie combinatoire dont l'oeil saisit à la fois toutes les parties, est bien préférable à un long enoncé en langue vulgaire qui n'est pourtant jamais que de l'algèbre traduite. Je remarque en passant que d'après cet éclaircissement la langue batave a seule un nom convenable pour algèbre ou plûtôt pour Analyse: Stellkonst, l'art de construire la norme de résolution. L'espagnol Algebra, derivé de l'arabe et signifiant, fraction; l'italien Cosa ou Cossa, sousentendu maravigliosa, la chose merveilleuse; l'allemand Buchstabenrechnung, calcul literal, ne présentent que des idées imparfaites ou fausses. Comme elles deviennent justes en y attachant le sens convenable, je ne m'y arrêterai pas davantage.

MACHIN a déja observé qu'au fond toute quantité algébrique est numérique. En effet l'Analyse mathématique opère, non sur les choses elles - mêmes, mais sur leurs rapports de grandeur qui sont évidemment des nombres. Reciproquement tout nombre peut se représenter par une ligne, une surface, un solide, une force, un tems, etc.; enfin par une chose quelconque comparée à une autre chose de même espèce, et chaque fonction numérique est, comme on sait, évaluable ainsi par construction. Les opérations arithmétiques étant cependant, par la nature de nos moyens, susceptibles en pratique d'une précision incomparablement plus grande que celle des operations géométriques et méchaniques, les géomètres modernes préfèrent dans les cas compliqués, les approximations numériques aux constructions mentalement rigoureuses et réellement inutiles de leurs prédecesseurs. Cette révolution dans la manière de voir a converti, pour ainsi dire, l'Analyse en la ſcience des développemens virtuellement combinatoire dans ses procédés. Après les prodiges de l'Astronomie moderne, le dégoût des approximations a cessé chez les trop réligieux admirateurs des anciens: [19]) on s'est enfin apperçu qu'on disputait sur des mots et que $\sqrt{2}$, ou une ligne qui représente ce radical, n'est dans l'usage pas plus exact qu'une série convergente dont chaque coefficient est suffisamment approché. $a^{\frac{m}{n}}$, log b, sin C, Arc. tang Z, etc. comme formes simples et faciles par les tables, se considérent déja comme rigoureuses, et on peut leur assimiler chaque autre fonction réellement approximable a volonté. L'abus du terme Exactitude mathématique a duré trop long-tems: encore de nos jours il s'est trouvé des auteurs qui ont rejetté les résultats rigoureux obtenus par le calcul dit infinitésimal, parce qu'ils le

supposaient une méthode approximative: on a nommé géomètrique une courbe à points singuliers joints au hasard à la main, et on a refusé cette épithète à la courbe tracée d'un mouvement continu. La science par excellence n'aurait pas du connaître des logomachies. En est-elle aujourdhui entièrement exempte? La réponse à cette question m'ecarterait trop de l'Analyse Combinatoire où mon sujet me rappelle.

La Science des Combinaisons peut se diviser en deux grandes branches que je distinguerai par les noms de Combinatoire mathématique et de Combinatoire métaphysique en restreignant la valeur de ce mot aux notions incontestées que nous avons des choses, ou plûtôt de leurs rapports de qualité. La seconde branche, à beaucoup près la plus étendue, fera la matière d'une section à part. 20)

La Combinatoire mathématique, ou l'Analyse Combinatoire des rapports de quantité, est celle dont j'ai parlé jusques ici: elle a pour tâche de Réaliser une Norme quelconque de la manière la plus praticable. J'étens ici la signification de Norme à taut d'énoncés de calcul ou de construction qu'on veut. Les deux problêmes suivans peuvent en donner une idée plus précise. f, F, $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, $\overset{3}{F}$ etc. annoncent des fonctions arbitraires des variables qu'elles précédent.

1. Trouver Fx au moyen des conditions
$\overset{1}{F}(A,X,V)=o$; $\overset{2}{F}(A,X,V)=o$; $\overset{3}{F}(A,X,V)=o$

2. Dans $fV=A+BFV+CF^2V+DF^3V+$ etc. déterminer les coefficiens A, B, C, etc.; F^2 est ici $F(Fx)$ la fonction de la même fonction de V; ainsi des autres. Pour cette série, la plus générale qu'on ait encore imaginée, il ne faut absolument que l'Analyse Combinatoire, et pour le Retour par élimination elle seule rend les fonctions différentielles d'une uti-

lité pratique. Dans chaque problème de développement elle ne demande que le tems nécessaire à écrire les termes. [21]) On ne saurait raisonnablement prétendre davantage. La prolixité éventuelle des opérations, dépendant en entier de la structure des fonctions données, ne peut retomber sur la méthode. Le chemin rectiligne, s'il est long, n'en est pas moins le plus court possible.

J'observe ici que le calcul des différences directes et inverses étant au fond également combinatoire, on aurait tort de ne pas l'employer aux simplifications préalables, lorsqu'il s'y prête. Séparer l'Analyse différentielle de la Combinatoire est nuire à l'une et à l'autre. Ce n'est même qu'en les amalgamant complettement qu'on pourra donner aux grandes méthodes la perfection dont elles sont susceptibles. Sans cette reunion, le développement des fonctions en séries et le renveloppement des séries en fonctions feront souvent perdre ou la loi des termes généraux ou la simplicité des termes sommatoires.

En nommant **exacte** toute fonction dont la partie négligé est insensible en pratique, chaque série peut se renvelopper exactement par les méthodes exposées dans la seconde partie de cette Caractéristique. Il s'ensuit qu'un problème rappellé aux expressions

$$\Sigma^m y \Delta x^m, \quad \Sigma^m \Sigma^n (z \Delta x^m . \Delta x^n), \text{ etc.}$$

est parfaitement résoluble. Les combinaisons sont ici dans leur empire et ne laissent rien à désirer.

Une partie plus épineuse est l'Interpolation générale; c'est à dire:

Etant donné $f^\Lambda V$ pour chaque valeur entière de Λ, évaluer cette fonction consécutive pour Λ fractionnaire. Le développement en puissances ascendantes de Λ conduit chez moi à un Retour de fonction différentielle dont les Combinaisons elles-mêmes ne

viennent que difficilement à bout. Ici surtout l'on peut dire que l'Analyse est encore au berceau. Nous manquons absolument de méthode pour évaluer *praticablement* des expressions de la forme $\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}}$, $L^{\frac{1}{2}}\,1$, où je suppose $L^2\,1 = \log.\log 1$, etc. L'importance d'une solution générale du problême dans quantité de recherches qui intéressant le systême du monde et les probabités supérieures, fait souhaiter que les Géomètres y dirigent leurs efforts: par sa difficulté la tâche est digne des plus habiles. Nous avons déja de profondes recherches sur l'interpolation, mais elles ne sont que partielles. EULER ouvrit la carrière dans son Calcul Differentiel et KRAMP l'étendit naguère considerablement dans son excellente Analyse des Réfractions où l'invention brille de toutes parts: le grand ouvrage d'ARBOGAST si longtems attendu et que je regrette de ne pas encore posséder, donnera sans toute ici de nouvelles vues dignes de la sagacité de son auteur. 22) Si elles rendent inutiles mes recherches en ce genre, je supprimerai avec plaisir des essais dont je ne suis à beaucoup près pas content. Ce que je puis assûrer, c'est que sans l'Analyse Combinatoire on ne résoudra que rarement cette équation fonctionnaire dont dépend le problême:

$Ffx = \frac{dfx}{dx}\,Fx$. Ici fx est une fonction donnée de x et Fx est la fonction à déterminer.

Je reprens les séries. La manière de les considérer comme des développemens toujours renveloppables d'une fonction a divers avantages: elle écarte, au moins pour les commençans, la notion d'infini trop vague pour n'être pas pour eux une source des paralogismes. Communement on n'entend par série qu'une suite de termes dont on prend la somme arithmétique: Si cette forme

est le plus souvent préférable, il en est pourtant d'autres qui menent dans certains cas plus rapidement au but. Telle fonction rébelle à un développement se plie sans peine à un autre. La tangente qui a une loi fort compliquée en puissances de l'Angle, on obtient une élégante en serie continue:

$$\text{tang}\, x = \frac{x}{1 -}\ \frac{x^2}{3 -}\ \frac{x^2}{5 -}\ \frac{x^2}{7 -}\ \text{etc.}$$

en écrivant pour plus de commodité les fractions successives en ligne horisontale. 23) Au contraire sin x se complique en fraction continue, tandis que sa série vulgaire est aussi simple qu'on peut le désirer.

Les fractions continues dont EULER, LAGRANGE, et d'autres grands géomètres ont fait voir l'extrême utilité sont encore pour l'Analyse Combinatoire une des mines les plus riches: l'exploitation peut se réduire à ces trois problêmes:

1. Changer une fonction en fractions continues à numérateurs de la variable.

$$\text{P: E: } \Sigma^n X = \frac{x^n}{a +}\ \frac{x^r}{b +}\ \frac{x^s}{c +}\ \text{etc.}$$

2. La fraction générale étant donnée, trouver la fraction sommatoire réduite à sa moindre expression.

$$\text{P: E: } \frac{1^2}{1^2 +}\ \frac{2^2}{3 \cdot 2^2 +}\ \frac{3^2}{5 \cdot 3^2 +}\ \text{etc.}$$ L'Analyse différentielle préside ici à la combinatoire.

3. Étant donné $X = 0$, exprimer Y, autre fonction de x, en fonction continue d'une arbitraire.

$$\text{P: E: De } \frac{x^r}{a +}\ \frac{x^r}{b +}\ \frac{x^r}{c +}\ \text{etc.} = z,$$

conclure $x^m = \frac{z^{\frac{m}{n}}}{A +} \; \frac{z^t}{B +} \; \frac{z^u}{C +}$ etc.. Le cas le plus particulier de cet exemple prouvera combien le calcul différentiel est insuffisant pour determiner A, B, C, etc.

M' étant autrefois beaucoup occupé de la fraction générale et de la fraction sommatoire réduite, je fûs conduit à des procédés combinatoires et à une notation abrégée pour eux. Mais ne connaissant pas alors les travaux de HINDENBOURG, [24]) je demeurai loin de l'ordre lucide nécessaire dans ces opérations compliquées, et après bien des efforts j' abandonnai une partie intéressante. Tant il est vrai qu'on peut être sur la voie et n' y pas avancer, faute d' une certaine forme, qui pour être naturelle, n' est pourtant jamais que le fruit de longues, et ajoutons, heureuses méditations. Assurement je ne suis pas le seul qui ait fait cette expérience,

LAGRANGE dont les ouvrages sont si riches en procédés combinatoires, observe quelque part qu'on ne parvient guère au simple qu' après avoir epuisé le composé. Cette remarque d' un géomètre dont on admire l'élegante simplicité, est parfaitement applicable à l'Analyse Combinatoire. Dans les mains de LEIBNITZ, de MOIVRE, de BOSCOWICH, etc. cette science décourageait le plus intrépide calculateur: réduite en systême régulier par HINDENBOURG, rien n'est plus facile aujourdhui, et cette facilité de l' exécution est même telle qu' on pourrait être tenté de l'étendre à l' invention du système. Mais un mot suffit ici, il a échappé à l' universel et perspicace EULER. [25]) En rendant cette justice au celèbre géomètre de Leipsic, j' ai en vue et les personnes qui n' estiment une découverte mathématique qu' après sa difficulté apparente et celles qui trouvent aisé tout ce qui a été fait par d' autres.

J'en ai assez dit pour faire sentir l'importance de l'Analyse Combinatoire. Que peut-on lui souhaiter encore? Une caractéristique commode qui la repande chez les géomètres de tous les pays, dont elle ne sauroit manquer d'exciter l'émulation. Elle en est d'autant plus digne que ses usages sont innombrables, et qu'il n'est point de science, point d'Art, qui n'en puisse retirer de l'utilité. En Arithmétique (science toute combinatoire) elle enseigne la pratique la plus courte des grandes multiplications, divisions, éradications, compositions des périodes; elle facilite l'invention des facteurs, des nombres prémiers et figurés comme on veut, et surtout leur détermination sûre et rapide par des machines, dont on n'a pas encore tiré tout le parti possible. LEIBNITZ, LAMBERT, HINDENBOURG, FELKEL, et d'autres, [26]) en ont donné des preuves interessantes qui doivent encourager. Quand on ne fait pas entrer les fraix en compte, il est plus que probable qu'on peut continuer indéfinement le rapport 3,14159, et tout autre dont les élémens ne sont pas trop compliqués, sans autre peine que de tourner une manivelle. Ces recherches ne sont pas entierément oiseuses. *Ludi in seria ducunt.* Le monde n'auroit pas la sublime Méchanique céleste, si LAPLACE eût dédaigné ces jeux du génie.

En Analyse déterminée l'Analyse Combinatoire préside aux développemens et renveloppemens des fonctions, à la verification des termes généraux et sommatoires approchés, et elle seule peut réaliser les Eliminations étendues [27]) purement curieuses en enoncés differentiels. En Analyse indeterminée la plupart des solutions sont de son ressort. [28]) En Géometrie et Trigonometrie toute la partie formulaire et beaucoup de constructions, entr'autres la théorie des compartimens, dont on fait tant usage en Architecture. En Méchanique analytique, que LAGRANGE a le premier rédnit en corps de

doctrine, les équations générales des systêmes des corps et quantité d'autres parties appartiennent de droit à l'Analyse Combinatoire. Dans les Mathématiques appliquées elle peut servir l'Astronomie avec ses nombreuses auxiliaires et dépendances, mais surtout la science des probabilités, si utile en politique, en jurisprudence, en finance et négoce, dans les jeux et hasards de toute espèce [29]). En Chymie [30]) la théorie des fluides aëriformes et la Crystallographie ouvrent encore un immense champ aux Combinaisons et peuvent par elles fournir de nouvelles lumieres à la Médecine et aux arts d'utilité.

Il est des sciences et des arts à qui la Combinaison méthodique est si essentielle, que sans elle ils cessent d'être des arts et des sciences. Telles sont par exemple la Cryptographie ou l'art des chiffremens et déchiffremens [31]) la Caractéristique ou science de la notation dont les idéographies ou langues universelles ne sont que des simples branches.

Les manufactures de luxe, condamnées à nuancer sans cesse le tableau mouvant des modes, retireront non seulement pour leurs machines, mais encore pour la variété et le choix de leurs productions, des secours importans de la science combinatoire. Il en est de même des beaux-arts où la nouveauté n'est pas moins de nécessité première, et où celle avouée par le bon goût est si extrêmement rare. Je conviens sans peine que l'invention devient de jour en jour plus difficile et que les premières places sont prises partout: si les artistes usaient cependant des ressources innombrables que leur offre la combinaison systématique, ils n'accuseraient jamais l'art d'une pauvreté qui n'est que dans eux et ils sacrifieraient moins souvent les formes régulières aux extravagantes, comme ont fait Borromini, Bernini et tant de peintres. C'est principalement en Musique, l'art d'agrément le plus répandu, qu'on rencontre auprès d'une surcharge bizarre, cette stérilité que les nombreux

instrumens pallient envain aux oreilles non prévenues. Le vrai beau est toujours simple, et sans unité il ne saurait y avoir d'énergie, et, par consequent, de grand effet.

Qui le croirait? La poesie, pour la distribution heureusement ménagée des pieds et strophes, des rimes et repos, enfin de toute son harmonie technique, s'enrichit en s'appliquant les combinaisons, ainsi que la Rhétorique qui est une moindre poesie et la Logique ou l'art de penser juste indispensable à toutes les sciences. On connait en ce genre les essais précieux de LEIBNITZ, bien supérieurs à ceux de RAIMOND LULLY et du pere KIRCHER, qui prétendaient l'un dans son Grand-Art, l'autre dans sa Musurgie, mettre, par des classifications combinatoires un homme sans étude en état de raisonner sur chaque sujet comme un profond savant. On nuit aux sciences en leur attribuant trop: si chacune, et surtout celle d'inventer, est un résultat de combinaisons, il s'en faut bien que ce soient des combinaisons d'une pratique aussi facile et grossiere.

Usez, n'abusez point; voilà la loi suprême.
VOLT.

Mais ces parties appartiennent déja à la Combinatoire métaphysique, et le géomètre les cède sans regret au philosophe.

B) PREMIÈRE PARTIE.

Section troisième.

Sur l'Algèbre, écriture de l'Analyse mathématique.

FRAGMENS.

„Inventée par des mathématiciens, l'Algèbre a une précision lumineuse, et une souplesse dont aucune autre notation ne peut se vanter: mais composée, comme toutes, successivement et sans égard à l'ensemble, elle est loin encore d'être au plus haut dégré d'universalité et d'intelligence facile. L'imprimerie, à laquelle les sciences elles mêmes doivent leurs rapides progrès, a retardé ceux de leurs Caractéristiques en assujettisant les écrivains aux types existans. L'Analyse, faite pour le monde entier, n'en a pu sortir des langues européennes, et de toutes les classes de savans, celle des mathématiciens est la moins nombreuse.

„Trop souvent le bien est l'ennemi du mieux et le fond fait tort à la forme, tort qui réjaillit nécessairement sur lui. C'est la raison pourquoi aucune langue policée n'a une orthographe raisonnable et qu'on s'opposera toujours aux améliorations. Un reproche qu'on peut trop souvent faire à ces denières, c'est d'être partielles et de retarder par là la reforme générale. Tel est, par exemple, le changement de *oi* en *ai* pour rendre les sons *è* et *ê*, telle la suppression de certaines lettres oiseuses et l'introduction d'accens plus pénibles à la plume. A moins de rebâtir de fond en comble jamais on ne donnera à un vieux château gothique les belles proportions de l'Architecture grecque.

„Avec Bezout je nomme Algèbre l'écriture mathématique qui est à l'Analyse ce que les notes de la Musique sont à la composition. Au contraire de celle ci

l'Algèbre pèche par trop de liberté dans l'emploi des signes. S'il est commode pour l'auteur de créer son dictionnaire, il ne l'est pas au lecteur, surtout au commençant, de traduire sans cesse. L'esprit troublé par la versatilité des significations, perd son fil d'Ariadne: chargé de cent signes sans liaison systêmatique et fatigué d'explications continuelles, il ne peut s'élever sur l'aile de l'imagination pour découvrir au loin l'issue du labyrinthe. C'est là et dans l'incomplétion des prolixes livres élémentaires qu'il faut chercher, bien moins que dans la difficulté du sujet, pourquoi les chefs d'oeuvres d'Analyse sont plus admirés que lûs. Il faut retenir une infinité de préliminaires plus ou moins inhérens, il faut se faire jour a travers une bibliothèque de mémoires académiques pour jouir des sublimes productions de nos grands maîtres. Peu de studieux en ont les moyens le tems et le courage.

„On peut m'objecter que pour obtenir le droit de rémarquer les defauts de la science, j'aurais d'abord dû m'y distinguer par des ouvrages marquans. J'ai tort de ce côté, j'ai tort deux fois si mes rèflexions ne sont pas justes. A ceux qui s'étonneront que les maîtres de l'art ne les ayent pas faites, j'observerai qu'ils étaient peut-être trop occupés de l'art lui-même. LEIBNITZ a déja averti qu'il n'y a guère que ceux qui apprennent sans maître qui découvrent certaines choses auxquelles les initiés ne pensent point précisement parce qu'ils les connoissent trop.

„Je repète donc que l'écriture algèbrique est imparfaite par sa versatilité et son manque de plan. Il lui faudrait, comme à la musique et aux autres écritures, des signes permanens. Mais tant qu'elle n'aura pas un bon système de notation, la liberté de varier doit être précieuse au mathématicien: tandis que le musicien est enchaîné à ses notes, lui ose dire avec Horace:

Pictoribus atque poëtis aequa potestas:
Hanc veniam damus, petimusque vicissim,

Et en conséquence je présente dans la seconde partie de cet Essai une notation systématique d'une exécution aisée à la plume, bien plus courte et plus distincte que celle en lettres alphabétiques, et significative au point de ne presque pas exiger d'avertissement pour qui la sait une fois. En embrassant l'Analyse entière et même ses besoins futurs elle n'a que peu de caractères méthodiquement combinés, et ce qui ne peut manquer de paraître singulier, avec des signes nouveaux elle ne contredit jamais l'usage vraiment général. La simplicité étant essentielle à une écriture de pratique je me suis borné à des lignes droites assemblées sous des angles moitié ou tiers de l'angle complet.

Ceux qui trouvent que j'attache trop d'importance à la structure des signes ne songent point qu'en mathématique, et même partout, la forme détermine en grande partie le fond. L'Analyse doit ses premiers progrès aux abbréviations de discours comme on le trouve dans Diophante et dans les auteurs arabes: ses progrès suivans appartiennent aux chiffres algébriques, c'est à dire aux chiffres encadrés et aux lettres dont on se servit d'abord pour désigner des nombres connus, puis des nombres quelconques: son vol rapide est dû aux exposans et aux autres symboles fonctionnaires et combinatoires. Le calcul des différences de toute espèce qu'est-il sans notation convenable? rien que la méthode des limites infructueuse tant de siècles. J'ignore qui le premier a imaginé le signe-fonction φx ou Fx: mais bagatelle en apparence il a ouvert une source de découvertes, et sans lui Lagrange n'eut peut-être pas donné sa belle formule de reversion et ses autres théorêmes transcendans. On a disputé cent ans sur la nature du calcul différentiel: on se serait entendu sur le champ

si Newton et Leibnitz eussent écrit: $\frac{\dot{y}_{,}}{\dot{x}}$ ou $\frac{dy}{dx}$ est $\frac{Fv - Fx}{v - x}$ pour le cas de v changé en x après le dégagement du diviseur.

Mais l'éffort d'imagination auquel oblige un changement imperceptible de x dans y, a multiplié (à l'aide des évanouissantes, des infiniment-petits, des riens absolus qui produisent une quantité, des limites qu'on ne peut jamais atteindre et qu'on atteint pourtant) les objections et les explications; et à force de commentaires on est parvenu à obscurcir la chose du monde la plus claire. On peut dire que le noeud gordien n'a été vraiment dénoué que dans ces derniers tems. Nous nous étonnons que des géomètres ayent pû être divisés sur des principes simples; mais ce qui est évident aujourd-hui ne l'était point dans sa nouveauté, et la route une fois perdue, on ne la retrouve plus qu'avec des peines extrêmes. Tout est difficile quand on cherche, tout est facile quand on a trouvé. L'oeuf de Colomb peut s'appliquer aux inventions de tout genre, auxquelles on ne marche que les yeux bandés. A la vérité l'inventeur n'épuise jamais son invention: c'est une consolation pour la mediocrité laborieuse. Avide de nouvelles découvertes le génie abandonne à la patience le soin de finir et la science y gagne doublement. Cet opuscule est le fruit de semblables considérations.

Je passe aux bases sur lesquelles il me semble qu'il faut asseoir une bonne notation analytique.

1. La plus grande intelligibilité est sans doute la première qualité, mais il faut ajouter, pour le commençant. Au géomètre fait la notation dont il a la routine, paraîtra toujours la meilleure. C'est pour cela (Voltaire et d'autres l'ont déja dit) que les reformes en sciences et ailleurs ne s'exécutent guère que

par les jeunes gens, quoique ce ne soient pas toujours eux qui les proposent. N'ayant que la peine d'apprendre, ils préfèrent naturellement la manière la plus simple: les véterans devraient desaprendre pour apprendre, deux choses également ingrates pour qui est en possession d'enseigner.

2. Une autre qualité essentielle est la Précision, qu'il ne faut pas confondre avec la simple briéveté. Pour indiquer généralement une série, X est plus court que _|‾ |V: mais cette dernière représentation, comme on le verra dans la seconde partie, est la miniature de la série même, et X n'est rien sans avertissement. On voudra bien faire cette remarque toutes les fois que nos symboles sont composés: ils s'enterprêtent alors eux-mêmes. La diffusion consiste en détails accumulés qui fatiguent le lecteur plus qu'ils ne l'éclairent: celui-ci n'a qu'une portion donnée d'attention dont on doit être économe pour qu'elle dure jusqu'à la fin.

3. Ce qui met le sceau aux conditions précédentes, c'est la construction méthodique des signes qui aide à les retenir, malgré leur nombre. Tout dépend ici d'un heureux choix d'élémens: est il fait? l'art combinatoire en tire à peu de fraix une richesse supérieure à tous les bésoins. Les élémens doivent être peu nombreux, et de bon goût.

S'il ne faut pas négliger la beauté des formes, elle doit cependant être subordonnée à la facilité de l'execution. L'élegance de la simplicité est la seule qui convienne aux sciences, celle d'ornement est pour les arts. Sous ce point de vue le Σ qui a 6 traits est inférieur à _|‾ qui n'en a que trois que la plume trace d'un coup: mais c'est là le moindre avantage de notre signe sommatoire.

On trouvera, j'éspère, en général nos formes agréables et dociles. En sacrifiant quelques accessoires, il ne

faudrait même pas de nouveaux caractères d'impression: mais, comme sans eux la composition typographique se complique, la gravure sera préférable en attendant. Il serait même à souhaiter que tous lès ouvrages de mathématiques, surtout élémentaires, se publiassent en planches, ne fût ce que parceque la figure pourrait toujours accompagner l'explication. La méthode des grands analystes modernes de compter les yeux pour rien en traitant la géometrie et la méchanique a ses inconveniens que ne compense pas le bon marché de l'ouvrage: Je donne dans la troisième partie de cet Essai une instruction complette et des procédés peu couteux pour graver en peu de tems à l'eau forte et en étain. Si les géomètres s'y accoutumaient (il ne faut pour cela que de la volonté et deux ou trois mois d'exercice) leurs productions ne fourmilleraient plus de fautes qui dévoyent le lecteur, et que les longs errata redressent rarement toutes. Les doigts de l'auteur sont plus fidèles que ceux du compositeur typographique rarement mathématicien.

Afin de montrer la souplesse de ma notation combinatoire sous tous les rapports, je l'ai appliquée à un Microcosme de haute Analyse qui pourra au moins aider les futurs rédacteurs d'élémens, à propager le goût de la science qui fait le plus d'honneur à l'esprit humain, abstraction faite de son utilité reconnue. Aux jeunes géomètres qui voudront m'étudier dans cette vue, je conseillerai de copier mot à mot, les 5 premières sections de la seconde partie, et celle de l'Analyse Combinatoire. Une seule transcription reflechie instruira plus qui cent lectures. En s'identifiant ainsi avec l'auteur, on s'approprie ses idées et on surmonte le préjugé de l'habitude qui fait paraître les procedés qu'on sait préférable aux dix fois plus faciles qu'il faut apprendre.

Les géomètres véterans qui se résoudront à parcourir mon travail, en seront dédommagés peut-être par

des théorêmes neufs ou demontrés d'une manière nouvelle et par le Polynome Combinatoire de Hindenbourg. Je me reserve d'en parler plus amplement dans les sections suivantes.

Puisse mon essai d'une algèbre universelle être de quelque utilité pratique, ou engager au moins une main plus savante à produire un ensemble plus simple et plus parlant encore! Il est très possible et j'en donnerais une preuve dans cet ouvrage, si une notation analytique sans + — . : et leurs équivalens, sans lettres et sans chiffres, n'avait trop l'air d'un amusement mathématique. En attendant les géomètres prendront ce qu'ils voudront de mon systême: il leur fournira au moins des ressources pour le cabinet.

Dans une entreprise aussi neuve, et tranchons le mot, aussi téméraire que celle d'une réforme algébrique, j'ai besoin de la plus grande indulgence: mais j'ai fait ce que j'ai pû pour m'en rendre digne. Vingt pages ont couté des années de travail. Des systèmes sans nombre ont précédé celui que je soumets au jugement du public mathématicien, et s'il m'est permis de le dire, je ne suis arrivé au plus praticable qu'après avoir épuisé ceux qui ne l'étaient point.

II.

DÉVELOPPEMENT GÉNÉRAL AUX FONCTIONS ARBITRAIRES.

PAR BURMANE.

Les méthodes vraiment générales tirent d'un petit nombre de principes simples une richesse inépuisable de conséquences utiles. C'est le propre du Calcul différentiel, de l'Analyse Combinatoire et des Dérivations du Professeur ARBOGAST. Une théorie qui participe de ces trois et que je nomme *fonctionnaire* m'occupe depuis plusieurs années: l'esquisse suivante mettra à portée de juger de sa facilité et de son étendue.

§. 1. f, F, $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, $\overset{3}{F}$, etc. $\overset{0}{F}$, $\overset{01}{F}$, $\overset{02}{F}$, etc. seront des caractéristiques de fonction indépendantes.

$f(fx)$ ou ffx s'abrégera f^2x et se prononcera *fonction* 2^{me} de x. On comprend f^3x, f^4x, f^5x etc. f^nx, la n^{me} fonction consecutive de x, est à peu près ce qu'ARBOGAST appelle la n^{me} Dérivée.

f^{-1} indiquera l'opération inverse de f; de sorte que $f^{-1}.fx=x$. Je donne à $f^{-1}x$ le nom systématique de *fonction négative* de x. Les formes $f^{-2}x$, $f^{-n}x$ s'expliquant par là. Si $fx=0$, on a $x=f^{-1}0$, expression qui peut avoir plusieurs et même une infinité de valeurs.

Il s'ensuit que

$$f^mf^nx=f^nf^mx=f^{m+n}x,\quad f^mf^{-n}x=f^{-n}f^mx$$
$$=f^{m-n}x,$$
$$f^1x=fx,\qquad f^0x=f^{1-1}x=ff^{-1}x=x.$$

Imitée de d^n et d^{-n}, la notation exposée est celle de tous les géomètres et n'a rien de mystérieux : la nouveauté qu'elle peut avoir est dans le fond et non dans la forme.

Ces principes fonctionnaires sont parfaitement généraux. J'ai fait cette remarque en les donnant dans un Essai de Calcul fonctionnaire présenté à l'Institut National de France en VI, mais trop imparfait alors pour pouvoir être imprimé. Mes idées s'étendirent depuis, et plus d'un an avant que l'excellent Calcul des Dérivations quittât la presse, j'avais déja communiqué au Professeur HINDENBOURG et à d'autres amis litéraires la série aux fonctions consécutives,

$$Fx = A + Bfx + Cf^2x + Df^3x + \text{etc.}$$

En cherchant à me garantir du réproche futur de m'attribuer ce qui ne m'appartient pas, je suis très loin de vouloir atténuer le mérite du savant géomètre de Strasbourg, que personne n'admire plus que moi : nous n'avons pas communiqué ensemble. ARBOGAST a aumoins la simultanéité d'invention, et dans ce qu'il a publié le premier je lui cède avec plaisir la reconnaissance publique. Occupés du même objet nous avons dû nous rencontrer quelques fois ; mais nos points de départ et notre marche differant entièrement, il me reste assez des choses propres.

§. 2. Si nous comprenons par SUITE une succession de termes soumis à une même loi, et pour leur structure et pour leur liaison analytique, la théorie des développemens est à peine entamée. J'abandonne cette généralité à de plus habiles et me borne aujourdhui aux Séries et aux Fractions continues des fonctions si indépendantes entr'elles que le calculateur les choisit à volonté. Ceci distingue mes développemens de ceux d'ARBOGAST dont les termes, dérivés chacun du précédent, dèpendent nécessairement les uns des autres.

Voici d'abord mes normes générales :

SÉRIE

$$Fx - Fa = A\overset{1}{F}x + B\overset{2}{F}x + C\overset{3}{F}x + \ldots + N\overset{n}{F}x + \text{etc.}$$

FRACTION CONTINUE

$$Fx - Fa = \frac{\overset{1}{F}x}{A+}\ \frac{\overset{2}{F}x}{B+}\ \frac{\overset{3}{F}x}{C+} \ldots \frac{\overset{n}{F}x}{N} + \text{etc.}$$

J'écris les fractions successives en ligne horisontale : le $+$ après A, B, C, etc. empêchent de s'y tromper.

§. 3. Commençons par

$$Fx - Fa = A\overset{1}{F}x + B\overset{2}{F}x + C\overset{3}{F}x + \ldots + M\overset{n-1}{F}x + N\overset{n}{F}x +$$

etc. et supposons $\overset{1}{F}x$ nulle par $x = a$, $\overset{2}{F}x$ nulle par $x = a$ et $x = b$, $\overset{3}{F}x$ nulle par $x = a$, $x = b$ et $x = c$; enfin $\overset{n}{F}x$ nulle par $x = a$, b, c, d, jusques n, lettre n^{me}. Ces valeurs de x successivement employées dans la série normale, produisent les équations suivantes pour déterminer A, B, C, etc.

$$Fb - Fa = A\overset{1}{F}b$$

$$Fc - Fa = A\overset{1}{F}c + B\overset{2}{F}c$$

$$Fd - Fa = A\overset{1}{F}d + B\overset{2}{F}d + C\overset{3}{F}d$$

et en général

$$Fn - Fa = A\overset{1}{F}n + B\overset{2}{F}n + \ldots + M\overset{n-1}{F}n.$$

d'où $A = \dfrac{Fb - Fa}{\overset{1}{F}b}$

$$B = \frac{Fc - Fa}{\overset{2}{F}c} - A\,\frac{\overset{1}{F}c}{\overset{2}{F}c},$$

$$\text{d'où } C = \frac{Fd - Fa}{\overset{3}{F}d} - A\frac{\overset{1}{F}d}{\overset{3}{F}d} - B\frac{\overset{2}{F}d}{\overset{3}{F}d}$$

et en général

$$M = \frac{Fn - Fa}{\overset{n-1}{F}n} - A\frac{\overset{1}{F}n}{\overset{n-1}{F}n} - B\frac{\overset{2}{F}n}{\overset{n-1}{F}n} - \ldots - L\frac{\overset{n-2}{F}n}{\overset{n-1}{F}n}.$$

§. 4. Voilà le terme général en série récurrente. Pour obtenir son expression immédiate mettons la seconde suite d'équations sous une forme combinatoire facile à écrire et à retenir.

$$A = 01$$
$$B = 02 - A.\,12$$
$$C = 03 - A.\,13 - B.\,23$$
$$D = 04 - A.\,14 - B.\,24 - C.\,34$$
$$E = 05 - A.\,15 - B.\,25 - C.\,35 - D.\,45$$

etc. etc.

LEIBNITZ est l'inventeur de ces coefficiens parlans si commodes pour découvrir les loix compliquées. Chez nous le premier chiffre est l'indice de la fonction numérateur du vrai coefficient, et le second chiffre est l'indice de la fonction dénominateur. Augmenté d'une unité ce dernier apprend encore la quantième lettre remplace x dans les deux fonctions. Ainsi

$$24 = \frac{\overset{2}{F}e}{\overset{4}{F}e}, \quad 59 = \frac{\overset{5}{F}k}{\overset{9}{F}k}, \text{ etc.}$$

Par la substitution continuelle des valeurs connues, on obtient en ordonnant selon 01, 02, 03, etc, et rangeant par ordre ascendant de droite à gauche et de haut en bas

$$A = 01$$

$$B = 02 - 12.01$$

$$C = 03 - 23.02 + \left.\begin{array}{r} 23.12 \\ 13 \end{array}\right) 01$$

$$D = 04 - 34.03 + \left.\begin{array}{r} 34.23 \\ 24 \end{array}\right) 02 - \left.\begin{array}{r} 34.23.12 \\ 24.12 \\ 34.13 \\ 14 \end{array}\right) 01$$

$$E = 05 - 45.04 + \left.\begin{array}{r} 45.34 \\ 35 \end{array}\right) 03 - \left.\begin{array}{r} 45.34.23 \\ 35.23 \\ 45.24 \\ 25 \end{array}\right) 02 + \left.\begin{array}{r} 45.34.23.12 \\ 35.23.12 \\ 45.24.12 \\ 25.12 \\ 45.34.13 \\ 35.13 \\ 45.14 \\ 15 \end{array}\right) 01$$

$$F = 06 - 56.05 + \left.\begin{array}{r} 56.45 \\ 46 \end{array}\right) 04 - \left.\begin{array}{r} 56.45.34 \\ 46.34 \\ 56.35 \\ 36 \end{array}\right) 03$$

$$+ \left.\begin{array}{r} 56.45.34.23 \\ 46.34.23 \\ 56.35.23 \\ 36.23 \\ 56.45.24 \\ 46.24 \\ 56.25 \\ 26 \end{array}\right) 02 - \left.\begin{array}{r} 56.45.34.23.12 \\ 46.34.23.12 \\ 56.35.23.12 \\ 36.23.12 \\ 56.45.24.12 \\ 46.24.12 \\ 56.25.12 \\ 26.12 \\ 56.45.34.13 \\ 46.34.13 \\ 56.35.13 \\ 36.13 \\ 56.45.14 \\ 46.14 \\ 56.15 \\ 16 \end{array}\right) 01$$

et ainsi de suite

La seule disposition des termes partiels decouvre déjà leur loi, qui est telle pour le n^{ieme} coefficient:

$$N = o^n + a.o^{(n-1)} + b.o^{(n-2)} + c.o^{(n-3)} + \text{etc.},$$

$$a = -(n-1)n$$

$$b = -a.(n-2)(n-1) - (n-2)n$$

$$c = -b.(n-3)(n-2) - a.(n-3)(n-1) - (n-3)n$$

$$d = -c.(n-4)(n-3) - b.(n-4)(n-2) - a.(n-4)(n-1) - (n-4)n$$

$$e = -d.(n-5)(n-4) - c.(n-5)(n-3) - b.(n-5)(n-2) - a.(n-5)(n-1) - (n-5)n$$

etc. etc. etc.

Les novices en Analyse Combinatoire voudront bien ne pas confondre avec les recurrences ordinaires cette construction d'un terme au moyen de ses parties intégrantes : elle donne sur le champ tel coëfficient qu'on veut. P. E.

le $9^{\text{ième}}$ coëfficient

$$= o^9 - 89.o^8 + \left.\begin{matrix} 89.78 \\ -\ 79 \end{matrix}\right\} o^7 - \left.\begin{matrix} 89.78.67 \\ +\ 79.67 \\ +\ 89.68 \\ -\ 69 \end{matrix}\right\} o^6 + \text{etc.}$$

Un peu d'attention découvre d'autres loix ; mais la présente ne laisse rien à désirer : elle n'exige que le tems nécessaire pour écrire le developpement.

Cette méthode simple de trouver le terme général d'une série si étendue prouve la supériorité de l'Analyse Combinatoire sur la differentielle dans cette partie.

§. 5. Passons à un autre point de vue, en supposant $\overset{n}{F}x = f^n x$, quantité nulle par $x = a$. Il en resulte $Fx - Fa = Afx + Bf^2x + Cf^3x + \ldots + Nf^nx + \text{etc.}$

Si f^{-1} est de nature à se prendre terme pour terme et à ne pas altérer les facteurs sans x,

$$f^{-n}(Fx - Fa) = f^{-n}(Afx + Bf^2x + Cf^3x + \text{etc.})$$

se reduira à $f^{-n}Fx = N + Ofx + Pf^2x + \text{etc.}$

Par $x = a$ nous obtenons ici $N = f^{-n}Fa$, et par là

$Fx - Fa = f^{-1} Fa . fx + f^{-2} Fa . f^2 x + f^{-3} Fa . f^3 x + \text{etc}$

Le théorème de TAYLOR $Fx - Fa = \frac{dFa}{da} . \int dx + \frac{d^2 Fa}{da^2} . \int^2 dx^2 + \frac{d^3 Fa}{da^3} . \int^3 dx^3 + \text{etc.}$ est le cas le plus particulier de la série aux fonctions consécutives.

Une infinité d'autres opérations que celles indiquées par d et Δ, $\int$ et Σ satisfait à $Fx - Fa = f^{-1} Fa . fx + \text{etc.}$ J'observe ici qu'en fonctions consécutives il y à une différence essentielle entre fFz simple combinaison de Fz avec des constantes, et fFz, combinaison des variations de Fz avec des variations de z. Dans ce paragraphe f embrasse les deux cas, en les soumettant à la limitation stipulée.

§. 6. Soit $\overset{n}{F}x$ de la forme $\overset{1}{F}x . \overset{2}{F}x . \overset{3}{F}x \ldots \overset{n}{F}x$. Donc
$Fx - Fa = A\overset{1}{F}x + B\overset{1}{F}x . \overset{2}{F}x + C\overset{1}{F}x . \overset{2}{F}x . \overset{3}{F}x + \text{etc.}$

Comme $\overset{1}{F}x = 0$, $\overset{2}{F}x = 0$, $\overset{3}{F}x = 0$, etc. produisent respectivement $x = \overset{1}{F}{}^{-1} 0 = a$, $x = \overset{2}{F}{}^{-1} 0 = b$, $x = \overset{3}{F}{}^{-1} 0 = c$, etc. la formule du §. 4. construit sur le champ A, B, C, etc.

Quand l'évaluation de $Ff^{-1} 0$ n'est pas immédiatement possible, je l'écris $Ff^{-1} (fs - fs)$, et le théorème taylorien donne par $Ff^{-1} fs = Fs$,

$$Ff^{-1} 0 = Fs - \frac{dFs}{dfs} . \frac{fs}{1} + \frac{d^2 Fs}{dfs^2} . \frac{fs^2}{1.2} - \frac{d^3 Fs}{dfs^3} . \frac{fs^3}{1.2.3.} + \text{etc.},$$ s étant asbitraire.

Cette solution simple se trouve dans l' Essai de Calc. fonct. section 4). A chaque différentiation on divise par dfs et réduit, moyennant quoi on ne parvient pas de secondes différences de s. Lorsque ce

procédé compliqué on y remédie souvent par

$$\frac{d^n \,\mathrm{Fs}}{d\,\mathrm{fs}^n} = \frac{d^{n-1}\left[\frac{d\,\mathrm{Fs}}{ds}\cdot\left(\frac{s - s}{\mathrm{fs} - \mathrm{f}s}\right)^n\right]}{ds^{n-1}},$$

la constante s se changeant en s après les différentiations.

J'ai présenté cette formule conversionnelle un peu plus généralement dans un mémoire que l'Institut National a jugé digne d'être imprimé dans ses recueils de l'an VII, en m'observant qu'elle peut se déduire des théorèmes réversionels de LAGRANGE et de LAPLACE.

Afin d'épargner à d'autres des recherches inutiles et peut-être des paralogismes, j'avertis qu'il n'est permis ni de prendre n négatif, ni de changer sous le signe d^{n-1}, la fraction indécise $\frac{s - s}{\mathrm{fs} - \mathrm{f}s}$ en sa valeur finale $\frac{ds}{d\,\mathrm{fs}}$.

§. 7. Autre cas particulier du § 3.

$\overset{n}{\mathrm{F}}x$ étant $\overset{on}{\mathrm{F}}x\,[\overset{1n}{\mathrm{F}}x - \overset{1n}{\mathrm{F}}a]\;[\overset{2n}{\mathrm{F}}x - \overset{2n}{\mathrm{F}}(a+k)]$

$[\overset{3n}{\mathrm{F}}x - \overset{3n}{\mathrm{F}}(a+2k)] \ldots [\overset{nn}{\mathrm{F}}x - \overset{nn}{\mathrm{F}}(a+(n-1)k)]$,

on a $\mathrm{F}x - \mathrm{F}a = \mathrm{A}\overset{01}{\mathrm{F}}x.\;[\overset{11}{\mathrm{F}}x - \overset{11}{\mathrm{F}}a] + \mathrm{B}\overset{02}{\mathrm{F}}x\;[\overset{12}{\mathrm{F}}x - \overset{12}{\mathrm{F}}a]$

$[\overset{22}{\mathrm{F}}x - \overset{22}{\mathrm{F}}(x+k)] +$ etc.

Outre la solution du § 3. qui donne $b = a + k$, $c = a + 2k$, $d = a + 3k$, etc. nous avons encore la suivante,

$\overset{n+r}{\mathrm{F}}x$ variée n fois selon $\Delta x = k$ contante, aura un facteur $\overset{n+1}{\mathrm{F}}(x + nk) - \overset{n+1}{\mathrm{F}}(a + nk)$, que $x = a$ annullera.

Il s'ensuit que $\frac{\Delta^n \overset{n+r}{\mathrm{F}}x}{k^n}$ developpé disparaîtra alors, et qu'en différentiant n fois l'équation proposée, on

obtiendra $\frac{\Delta^n Fx}{k^n} = A\,\frac{\Delta^n(\overset{01}{F}x.[\overset{11}{F}x - \overset{11}{F}a])}{k^n}$

$$+ B\,\frac{\Delta^n(\overset{02}{F}x.[\overset{12}{F}x - \overset{12}{F}a][\overset{22}{F}x - \overset{22}{F}(a+k)])}{k^n} +$$

$$\ldots + N\,\frac{\Delta^n(\overset{0n}{F}x.[\overset{1n}{F}x - \overset{1n}{F}a]..[\overset{nn}{F}x - \overset{nn}{F}(a+(n-1)k])}{k^n}$$

à la condition de changer x en a après les différentiations,

Application. $\Sigma Fx.\Delta x$ nulle par $x = a$ devient ainsi $\Sigma Fx.\Delta x = A\overset{01}{F}x.[\overset{11}{F}x - \overset{11}{F}a] + B\overset{02}{F}x.[\overset{12}{F}x - \overset{12}{F}a][\overset{22}{F}x - \overset{22}{F}(a+\Delta x)]$ + etc. série convergente à volonté, puisque chaque fonction y est arbitraire. La rélation de coefficiens est la même qu'en haut.

Par k nulle, on a $\int Fx\,dx = A\overset{01}{F}x.(\overset{11}{F}x - \overset{11}{F}a) + B\overset{02}{F}x.(\overset{12}{F}x - \overset{12}{F}a)(\overset{22}{F}x - \overset{22}{F}a) + C\overset{03}{F}x.(\overset{13}{F}x - \overset{13}{F}a)(\overset{23}{F}x - \overset{23}{F}a)(\overset{33}{F}x - \overset{33}{F}a)$ + etc. et la rélation

$$\frac{d^n Fx}{dx^n} = A\,\frac{d^n(\overset{01}{F}x.[\overset{11}{F}x - \overset{11}{F}a])}{dx^n} + \ldots$$

$$\ldots + N\,\frac{d^n(\overset{0n}{F}x.[\overset{1n}{F}x - \overset{1n}{F}a]\ldots[\overset{nn}{F}x - \overset{nn}{F}a])}{dx^n},$$

toujours pour x finalement $= a$.

$\Sigma^m Fx.\Delta x^m$ et $\int^m Fx.dx^m$ s'obtiennent d'une manière semblable: mais je ne puis m'étendre là-dessus.

§. 8. *Cas plus particulier.* D'après les principes différentiels de l'Essai de Calcul fonctionnaire, section 1 et 2, on a pour Δx constante,

$$\Sigma^m \Delta(x-a)^m = \frac{x-a}{1} \cdot \frac{x-a-\Delta x}{2} \cdot \frac{x-a-2\Delta x}{3} \cdots \frac{x-a-(n-1)\Delta x}{n}.$$

sans arbitraires ajoutées.

Ceci posé, $Fx - Fa = A\overset{1}{F}x.\ \Sigma\Delta(x-a) + B\overset{2}{F}x.\ \Sigma^2\Delta(x-a)^2 + C\overset{3}{F}x.\ \Sigma^3\Delta(x-a)^3 +$ etc. prendra la forme suivante par le procédé du §. 3. en changeant x en $a + n\Delta x$ et effaçant ce qui se détruit dans chaque facteur,

$$F(a+n\Delta x) - Fa = \frac{n\Delta x}{1} A\overset{1}{F}(a+n\Delta x) + \frac{n(n-1)\Delta x^2}{1.2} B\overset{2}{F}(a+n\Delta x) + \frac{n(n-1)(n-2)\Delta x^3}{1.2.3} C\overset{3}{F}(a+n\Delta x) + \ldots$$

$$\ldots + \Delta x^n . N\overset{n}{F}(a+n\Delta x)$$

Mais on a aussi par le paragraphe précédent, en exécutant les développemens différentiels et supprimant ce que $x = a$ détruit,

$$\frac{\Delta^n Fa}{\Delta a^n} = \frac{n}{1} A \frac{\Delta^{n-1}\overset{1}{F}a}{\Delta a^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} . B \frac{\Delta^{n-2}\overset{2}{F}a}{\Delta a^{n-2}} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} C \frac{\Delta^{n-3}\overset{3}{F}a}{\Delta a^{n-3}}$$

$$+ \ldots + N\overset{n}{F}a,$$

Δa étant ici la même constante que Δx. Cette rélation des coëfficiens est la meilleure pour les différences nulles et la premiere pour les différences finies.

Changeons Δ et Σ en d et $\int$, il vient par

$$\int^n d(x-a)^n = \frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}$$

$$Fx - Fa = A\overset{1}{F}x . \frac{x-a}{1} + B\overset{2}{F}x . \frac{(x-a)^2}{1,2}$$
$$+ C\overset{3}{F}x . \frac{(x-a)^3}{1 . 2 . 3} + \text{etc.}$$

$$\frac{d^n Fa}{da^n} = \frac{n}{1} A \frac{d^{n-1}\overset{1}{F}a}{da^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 . 2} .$$
$$B \frac{d^{n-2}\overset{2}{F}a}{da^{n-2}} + \ldots + N\overset{n}{F}a$$

§. 9. *Extension du cas précédent.* La série plus générale

$$Fx - Fa = A\overset{1}{F}x . \frac{fx - fa}{1} + B\overset{2}{F}x . \frac{(fx-fa)^2}{1 . 2}$$
$$+ C\overset{3}{F}x . \frac{(fx-fa)^3}{1 . 2 . 3}$$ + etc. a pour rélation des coëfficiens.

$$\frac{d^n Fa}{dfa^n} = \frac{n}{1} A \frac{d^{n-1}\overset{1}{F}a}{dfa^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1 . 2} B \frac{d^{n-2}\overset{2}{F}a}{dfa^{n-2}}$$
$+ \ldots . + N\overset{n}{F}a$ où l'on employera s'il en est besoin la formule conversionnelle §. 6.

Application I. $\int Fx . dx = A\overset{1}{F}x . \frac{fx - fa}{1}$
$+ B\overset{2}{F}x . \frac{(fx-fa)^2}{1 . 2}$ + etc., intégrale nulle par $x = a$ a donc cette rélation pour déterminer A, B, C, etc.

$$\frac{d^n(\int Fa . da)}{dfa^n} \text{ ou } \frac{d^{n-1}\left(\frac{Fa . da}{dfa}\right)}{dfa^{n-1}} =$$

$\frac{n}{1} A \frac{d^{n-1}\overset{1}{F}a}{dfa^{n-1}} + \ldots + N\overset{n}{F}a$, ou par la formule conversionelle $\frac{d^{n-1}\left[Fa . \left(\frac{a - \alpha}{fa - f\alpha}\right)^n\right]}{da^{n-1}}$

$$= \frac{n}{1} A \frac{d^{n-2}\left[\frac{d\overset{1}{F}a}{da} . \left(\frac{a-\alpha}{fa - f\alpha}\right)^{n-1}\right]}{da^{n-2}} + \ldots + N\overset{n}{F}a$$

a constante devenant finalement a. $\int^n Fx. dx^m$ ayant, comme il est toujours possible à l'aide des constantes ajoutées, un facteur x^m, n'éxige de plus qu'un développement plus ou moins grand du membre gauche de la rélation.

Ces séries intégrales où chaque terme est à l'arbitre du calculateur, sont bien supérieures à celles de BERNOULLI qui divergent trop souvent.

Application II. $Fx - Fa = A\overset{1}{F}fx. \frac{fx - fa}{1}$ $+ B\overset{2}{F}fx. \frac{(fx - fa)^2}{1.2} + C\overset{3}{F}fx. \frac{(fx - fa)^3}{1.2.3} +$ etc. a pour rélation des coëfficiens

$$\frac{d^n Fa}{dfa^n} \text{ ou } \frac{d^{n-1}\left[\frac{dFa}{da}.\left(\frac{a - a}{fa - fa}\right)^n\right]}{da^{n-1}} =$$

$$\frac{n}{1} A \frac{d^{n-1}\overset{1}{F}fa}{dfa^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} B \frac{d^{n-2}\overset{2}{F}fa}{dfa^{n-2}} + ..$$

$+ N\overset{n}{F}a$ Le membre droit n'a pas besoin de conversion différentielle, fa y étant la variable commune.

Soit $fx = o$ une équation donnée, vulgaire ou transcendante, on a en même tems

$$Fx = Fa - A\overset{1}{F}o. \frac{fa}{1} + B\overset{2}{F}o. \frac{fa^2}{1.2} - C\overset{3}{F}o. \frac{fa^3}{1.2.3}$$
$+$ etc.

Voila donc une conversion fonctionnaire plus étendue que celles données jusqu'aujourdhui, puisque non seulement a, mais encore la structure de $\overset{1}{F}$, $\overset{2}{F}$, $\overset{3}{F}$, etc. y sont arbitraires. C'est le Retour des suites de LAGRANGE généralisé par les fonctions indépendantes, sous une forme pratique commode.

Exemple. De $fx - \int X dx = o$ conclure immédiatement Fx En prenant pour a la valeur de x qui annulle l'intégrale: on a pour Fx la série ci-dessus, et

pour rélation récurrente des coëfficiciens,

$$\frac{d^n Fx}{d(fx-\int X dx)^n} = \frac{n}{1} A \frac{d^{n-1}\overset{1}{F}(fx-\int X dx)}{d(fx-\int X dx)^{n-1}}$$

$+ \ldots + N\overset{n}{F}fx$, x s'y changeant en a après les différentiations. Cette condition dégage la rélation de tout signe $\int$. Je ne sache pas qu'on ait encore étendu les Retours de suite aux équations différentielles.

Le terme général $N\overset{on}{F}fx.[\overset{1n}{F}fx-\overset{1n}{F}fa][\overset{2n}{F}fx-\overset{2n}{F}fa] \ldots [\overset{nn}{F}fx-\overset{nn}{F}fa]$ donne un Retour beaucoup plus étendu dont les §. §. 3 et 7. nous assûrent également la loi des coëfficiens.

§. 10. Soient pour simplifier $Fx - Fa = (X)$, $\overset{on}{F}x.[\overset{1n}{F}x-\overset{1n}{F}a][\overset{2n}{F}x-\overset{2n}{F}(a+k)] \ldots [\overset{nn}{F}x-\overset{nn}{F}(a+(n-1)k)] = (\overset{n}{X})$; soient X et $\overset{n}{X}$ ces mêmes quantités en y changeant x en a après les différentiations éventuelles: nous aurons par la remarque du §. 7, la n^{ieme} variée de $\overset{n+1}{X}$ nulle. Il en résulte, qu'en différentiant n fois selon $\Delta x = k$ l'equation $(X) = A(\overset{1}{X}) + B(\overset{2}{X}) + C(\overset{3}{X}) +$ etc., et divisant toujours par la différence qu'affecte le premier coëfficient, il disparoitra chaque fois un de ceux-ci et $x = a$ procurera successivement

$$A = \frac{\Delta X}{\Delta \overset{1}{X}}, \quad B = \frac{\Delta(\Delta X : \Delta \overset{1}{X})}{\Delta(\Delta \overset{2}{X} : \Delta \overset{1}{X})}$$

$$C = \frac{\Delta[\Delta(\Delta X : \Delta \overset{1}{X}) : \Delta(\Delta \overset{2}{X} : \Delta \overset{1}{X})]}{\Delta[\Delta(\Delta \overset{3}{X} : \Delta \overset{1}{X}) : \Delta(\Delta \overset{2}{X} : \Delta \overset{1}{X})]}$$

$$D = \frac{\Delta\left(\dfrac{\Delta[\Delta(\Delta X : \Delta \overset{1}{X}) : \Delta(\Delta \overset{2}{X} : \Delta \overset{1}{X})]}{\Delta[\Delta(\Delta \overset{3}{X} : \Delta \overset{1}{X}) : \Delta(\Delta \overset{2}{X} : \Delta \overset{1}{X})]}\right)}{\Delta\left(\dfrac{\Delta[\Delta(\Delta \overset{4}{X} : \Delta \overset{1}{X}) : \Delta(\Delta \overset{2}{X} : \Delta \overset{1}{X})]}{\Delta[\Delta(\Delta \overset{3}{X} : \Delta \overset{1}{X}) : \Delta(\Delta \overset{2}{X} : \Delta \overset{1}{X})]}\right)}$$

Or le §. 7. nous enseigne le développement de N en fonction commune et différentielle: nous savons donc exécuter la n^{ieme} de ces différentiations hétérogénes, sans autre peine que d'écrire le résultat.

§. 11. *Interpolation de, etc.*, $f^{-2}x$, $f^{-1}x$, x, fx, f^2x, f^3x, etc. C'est l'évaluation de $f^{\pm n}x$, pour n fractionnaire. Communement n ne passe pas $\frac{1}{2}$.

En prenant pour a, b, c, etc. des nombres de la suite etc. — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, etc. la série normale est en même tems une formule d'interpolation. Voici de plus la méthode que j'ai donnée dans l'Essai de *Calcul fonctionnaire* et qui est au moins singulière.

Soit $f^n x - x = A\frac{n}{1} + B\frac{n^2}{1.2} + C\frac{n^3}{1.2.3}$ + etc., on aura $A = \frac{df^n x}{dn}$ pour n nulle après la différentiation, ce que nous représenterons par $\frac{df^\circ x}{do}$. Mais comment différentier un pur indice?

La transformation $\frac{df^\circ x}{do} = fx - x - \frac{1}{2}(f^2x - 2fx + x) + \frac{1}{3}(f^3x - 3f^2x + 3fx - x)$ — etc. ne converge presque jamais: ordonnés en fonctions ascendantes, elle donne un résultat en apparence absurde: elle suppose d'ailleurs que fx, f^2x, f^3x, etc. soient possibles; ce qui n'a souvent pas lieu en interpolation. P. E. dans $L^{\frac{1}{2}}1$ ou $L^2 1 = LL1 = L0 = -\infty$. Cherchons à tourner ces obstacles. $\frac{df^n x}{dn} = \frac{f^{n+dn}x - f^n x}{dn} = \frac{f^n f^{dn} x - f^n x}{dn}$ par §. 1. Comme A, B, C, etc. ne contiennent pas n on a $f^{dn}x = x + A\frac{dn}{1} + B\frac{dn^2}{1.2}$ + etc. et $f^n f^{dx} x = f^n(x + A\frac{dn}{1} + \text{etc.}) = f^n x + \frac{df^n x}{dx}$.

$A dn + (\text{etc.}) dn^2$ par la formule de TAYLOR. Substitution faite de cette valeur, il vient en arrangeant

$\frac{df^n x}{dn} = A \frac{df^n x}{dx}$, théorème remarquable, qu'on peut énoncer ainsi : $\frac{dF^{m+n} x}{dn} = \frac{dF^m x}{dFm} \cdot \frac{dF^{m+n} x}{dx}$.

Soumettons y le développement de $f^n x$, et l'identité de $A + B \frac{n}{1} + C \frac{n^2}{1.2} + D \frac{n^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ $= A + A \frac{dA}{dx} \cdot \frac{n}{1} + A \frac{dB}{dx} \cdot \frac{n^2}{1.2} + \text{etc.}$ nous procurera $B = A \frac{dA}{dx}$, $C = A \frac{dB}{dx} = A \frac{d(AdA)}{dx^2}$, $D = A \frac{dC}{dx} = A \frac{d(Ad(AdA))}{dx^3} + \text{etc.}$, et par conséquent $f^n x - x = A \frac{n}{1} + A \frac{dA}{dx} \cdot \frac{n^2}{1.2}$ $+ \frac{Ad(AdA)}{dx^2} \cdot \frac{n^3}{1.2.3} + \frac{Ad(Ad(AdA))}{dx^3} \cdot \frac{n^4}{1.2.3.4}$ $+ \text{etc.}$ Jusques ici l'Essai de Calcul fonctionnaire à la fin de la 4me Section.

Pour déterminer A je remarque que cette équation a lieu pour chaque valeur de n : donc en prenant $n = 1$ on trouve en divisant

$$A = \frac{fx - x}{1 + \frac{dA}{2dx} + \frac{dA(dA)}{2.3dx^2} + \frac{d(Ad(AdA))}{2.3.4dx^3} + \text{etc.}}$$

La substitution continuelle de la valeur en partie connue de A donnera une espèce de fraction continue d'un calcul très rebelle.

Autrement. Désignons A par Fx pour avoir

$f^n x = x + Fx \cdot \frac{n}{1} + \text{etc.}$ Nous aurons aussi

$$\mathrm{f}^n \mathrm{f}x = \mathrm{f}x + \mathrm{F}\mathrm{f}x \cdot \frac{n}{1} + \text{etc.} \quad \text{et}$$

$$\mathrm{f}\mathrm{f}^n x = \mathrm{f}(x + \mathrm{F}x \cdot \frac{n}{1} + \text{etc.}) = \mathrm{f}x + \frac{d\mathrm{f}x}{dx}\mathrm{F}x\frac{n}{1}$$

$+$ etc. par le théorème taylorien. Donc puisque $\mathrm{f}^n \mathrm{f}x = \mathrm{f}\mathrm{f}^n x$ par §. 1., l'identité de leurs développemens fournit, en arrangeant,

$\frac{\mathrm{F}\mathrm{f}x}{\mathrm{F}x} = \frac{d\mathrm{f}x}{dx}$ équation où il faut déterminer $\mathrm{F}x = \mathrm{A}$. Sa résolution générale dépend des différences fonctionnaires, et si on la veut praticable, elle passe encore les forces de chaque analyse. Dans les cas particuliers il y a des ressources sans nombre, et les fractions continues sont une des plus sûres.

§ 12. Nous avons été obligés d'astreindre le $\overset{n}{\mathrm{F}}x$ de la série normale à des conditions de nullité: nous pourons les éviter dans la fraction continue normale,

$\mathrm{F}x - \mathrm{F}a = \frac{\overset{1}{\mathrm{F}}x}{\mathrm{A}+}\ \frac{\overset{2}{\mathrm{F}}x}{\mathrm{B}+}\ \frac{\overset{3}{\mathrm{F}}x}{\mathrm{C}+}$ etc. Mais avant tout, établissons quelques préliminaires.

§. 12. *Théorème.* $1'\ 2'\ 3'\ 4'$ etc. $0,\ 1,\ 2,\ 3,$ etc. équivalant à des lettres quelconques,

Si $0, = -\frac{1'}{1,+}\ \frac{2'}{2,+}\ \frac{3'}{3,+} \ldots \frac{n-1'}{n-1,+}\ \frac{n'}{n,}$,

on a

$$n, = -\frac{n'}{n-1,+}\ \frac{n-1'}{n-2,+}\ \frac{n-2'}{n-3,+} \ldots$$

$$\ldots \frac{3'}{2,+}\ \frac{2'}{1,+}\ \frac{1'}{0,}$$

$n-1'$ est ici le $(n-1)$ ième numérateur et $n-1,$ le $(n-1)$ ième dénominateur: ainsi des autres.

Démonstration. Multiplions l'équation $0, = -\frac{1'}{1,+}\ \frac{2'}{2,+} \ldots \frac{n'}{n,}$ par le dénominateur du

membre droit, $1, + \frac{2'}{2,+\ldots}\frac{n'}{n,}$, et divisons-la par le membre gauche o, il vient

$$1, + \frac{2'}{2,+}\quad\frac{3'}{3,+\ldots}\frac{n'}{n,} = -\frac{1'}{0,}\text{, et en transposant}$$

$$1, + \frac{1'}{0,} = -\frac{2'}{2,+}\quad\frac{3'}{3,+\ldots}\frac{n'}{n,}.$$

Multiplions encore ici par le dénominateur du membre droit et divisons par le membre gauche, nous aurons

$$2, + \frac{3'}{3,+\ldots}\frac{n'}{n,} = -\frac{2'}{1,+}\quad\frac{1'}{0,}\text{, et par la transposition:}$$

$$2, + \frac{2'}{1,+}\quad\frac{1'}{0,} = -\frac{3'}{3,+}\quad\frac{4'}{4,+\ldots}\frac{n'}{n,}.$$

La repétition du procedé procure

$$3, + \frac{3'}{2,+}\quad\frac{2'}{1,+}\quad\frac{1'}{0,} = -\frac{4'}{4,+\ldots}\frac{n'}{n,}\text{; puis}$$

$$4, + \frac{4'}{3,+\ldots}\frac{1'}{0,} = -\frac{5'}{5,+\ldots}\frac{n'}{n,}$$

Comme la marche est uniforme, on obtient finalement

$$n, + \frac{n'}{n-1,+}\quad\frac{n-1'}{n-2,+\ldots}\frac{1'}{0,} = 0\text{, et}$$

$$n, = -\frac{n'}{n-1,+}\quad\frac{n-1'}{n-2,+\ldots}\frac{1'}{0,}$$

§ 13. *Problème.* Sommer

$$\frac{n'}{n-1,+}\quad\frac{n-1'}{n-2,+}\quad\frac{n-2'}{n-3,+\ldots}\quad\frac{2'}{1,+}\quad\frac{1'}{0,}$$

En commençant la sommation de bas en haut on obtient successivement,

Dénominateurs 0,	1′ Numérateurs
1′	0,2′
210,+2,1′ 0,2′	10,3′+31′
3210,+32,1′+31′ 30,2′ 10,3′	210,4′+24,1′ 04,2′
43210,+432,1′+4,31′ 430,2′ 2,41′ 410,3′ 0,42′ 210,4′	3210,5′+32,51′+531′ 30,52 10,53′
543210,+5432,1′+54,31′+531′ 5430,2′ 52,41′ 5410,3′ 50,42′ 5210,4′ 32,51′ 3210,5′ 30,52′ 10,53′	43210,6′+432,61′+4,631′ 430,62′ 2,641′ 410,63′ 0,642′ 210,64′
6543210,+65432,1′+654,31′+6,531′ 65430,2′ 652,41′ 4,631′ 65410,3′ 650,42′ 2,641′ 65210,4′ 632,51′ 0,642′ 63210,5′ 630,52′ 43210,6′ 610,53′ 432,61′ 430,62′ 410,63′ 210,64′	543210,7′+5432,71′+54,731′+7531′ 5430,72′ 52,741′ 5410,73′ 50,742′ 5210,74′ 32,751′ 3210,75′ 30,752′ 10,753′

Et ainsi de suite. Pour simplifier je n' ai employé les traits distinctifs de numérateur et dénominateur qu'au dernier chiffre de chaque produit. Ces fractions sommées sont les valeurs respectives de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . De leur construction on conclut

n =

$$z = \frac{\left[\begin{array}{l} \overline{n-2}.\overline{n-3}..0, n' + \dfrac{\overline{n-2}.\overline{n-3}..2, \ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots n.\overline{n-2}'} \\ + \dfrac{\overline{n-2}.\overline{n-3}..4, \ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots n.\overline{n-2}.\overline{n-4}'} \\ + \dfrac{\overline{n-2}.\overline{n-3}..6, \ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots n.\overline{n-2}.\overline{n-4}.\overline{n-6}'} + \text{etc.} \end{array}\right]}{\left[\begin{array}{l} \overline{n-1}.\overline{n-2}..0, + \dfrac{\overline{n-1}.\overline{n-2}..2, \ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots \overline{n-1}'} \\ + \dfrac{\overline{n-1}.\overline{n-2}..4, \ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots \overline{n-1}.\overline{n-3}'} \\ + \dfrac{\overline{n-1}.\overline{n-2}..6, \ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots \overline{n-1}.\overline{n-3}.\overline{n-5}'} + \text{etc.} \end{array}\right]}$$

Les colonnes de doubles produits sont représentées ici par le premier produit des dénominateurs, et le dernier produit des numérateurs. On trouvera les produits, sousentendus au moyen des règles suivantes où les mots et chiffres supérieurs sont pour les numérateurs et les inférieurs pour les dénominateurs.

1°. Diminuez dans le produit exprimé le chiffre de la droite de $\frac{1}{2}$ jusqu'à ce que vous parveniez à $\frac{1}{0}$.

2°. Diminuez le second chiffre de $\frac{1}{2}$ et posez à sa droite un chiffre moindre de $\frac{2}{1}$.

3°. Repetez ici la règle 1re, puis la 2me et continuez jusqu'à exhaustion.

4°. Diminuez le troisième chiffre de $\frac{1}{2}$ et posez à sa droite deux chiffres progressivement moindres de $\frac{2}{1}$. Sur ces deux chiffres exécutez les règles 1e, 2e, 3e.

5°. Diminuez l quatrième chiffre de $\frac{1}{2}$ et posez à sa droite trois chiffres progressivement moindres de $\frac{2}{1}$, sur lesquels, vous exécuterez les règles précédentes.

6°. Continuez de la sorte et mettez les produits obtenus l'un $\frac{\text{sur}}{\text{sous}}$ l'autre. Joignez la colonne des dénominateurs à celle des numérateurs, et la colonne totale sera construite.

Un coup d' oeil attentif et surtout quelques transcriptions enseigneront mieux le procédé que ces règles longues à énoncer et difficiles à retenir. Jamais l' analyse différentielle ne decouvrirait cette loi que HINDENBOURG et BURCKHARDT on trouvée un peu différemment.

§. 14. *Problème.* Déterminer le n^{ieme} dénominateur N de la fraction continue des fonctions indépendantes.

$$Fx - Fa = \frac{\overset{1}{F}x}{A+}\;\frac{\overset{2}{F}x}{B+}\;\frac{\overset{3}{F}x}{C+}\cdots\frac{\overset{n-1}{F}x}{M+}\;\frac{\overset{n}{F}x}{N+}\;\frac{\overset{n+1}{F}x}{O+}\text{ etc.}$$

Soit $\overset{n+1}{F}x = o$, on a $x = \overset{n+1}{F}{}^{-1}o$, valeur censée connue. $\frac{\overset{n+1}{F}x}{o + \text{etc.}}$ s'évanouissant par cette supposition,

$$Fa - Fx = -\frac{\overset{1}{F}x}{A+}\;\frac{\overset{2}{F}x}{B+}\cdots\frac{\overset{n}{F}x}{N}$$ devient par §. 12.

$$N = -\frac{\overset{n}{F}x}{M+}\;\frac{\overset{n-1}{F}x}{L+}\;\frac{\overset{n-2}{F}x}{K+}\cdots\frac{\overset{3}{F}x}{B+}\;\frac{\overset{2}{F}x}{A+}\;\frac{\overset{1}{F}x}{Fa - Fx}$$

en y changeant x en $\overset{n+1}{F}{}^{-1}o$.

Cette solution simple d'un problême si illimité est utile autant que neuve.

Application très particulière.

$$Fx = Fo + \frac{x}{A+}\;\frac{x}{B+}\;\frac{x}{C+}\;\frac{x}{D + \text{etc.}}$$ donne ainsi

$$N = -\frac{1}{M+}\;\frac{2}{L+}\;\frac{3}{K+}\cdots\frac{n-2}{B+}\;\frac{n-1}{A+}\;\frac{n}{Fa - Fn}.$$

§. 15. Si $\overset{n+1}{F}x = o$ annulle toutes les fonctions précédentes, il faut sommer la fraction continue valeur de N, et la différentier haut et bas n fois selon x. Le §. 13. nous en fournit les moyens.

Exemple le plus particulier. Développer Fx en fraction continue à numérateurs x: c'est à dire

$$Fx = F\text{o} + \frac{x}{A+}\;\frac{x}{B+}\;\frac{x}{C+}\;\text{etc.}$$

Les formules combinatoires du §. 13. différentiées des deux parts, donnent, en nous souvenant que $1'$ $2'$ $3'$ etc. sont tous égaux à x et qu'on a $\text{o}_{,} = F\text{o} - Fx$; $1_{,} = A$, $2_{,} = B$; $3_{,} = C$, etc.

$$A = \frac{1}{F\text{o}},\; B = -\frac{2.\,{}_1F\text{o}}{A.\,{}_2F\text{o}},\; C = -\frac{3A.\,{}_3F\text{o}}{AB.\,{}_3F\text{o} + 3.\,{}_2F\text{o}}$$

$$D = -\frac{4AB.\,{}_3F\text{o} + 6.\,{}_2F\text{o}}{ABC.\,{}_4F\text{o} + 4(A+C).\,{}_3F\text{o}}$$

$$E = -\frac{5ABC.\,{}_4F\text{o} + 10(A+C).\,{}_3F\text{o}}{ABCD.\,{}_5F\text{o} + 5(AB+AD+CD).\,{}_4F\text{o} + 10.\,{}_3F\text{o}}$$

et ainsi de suite : nous savons la loi des coefficiens litéraux et numériques des quantités différentielles. ${}_1F\text{o}$ signifie $\frac{dFx}{dx}$ pour $x = \text{o}$ après la réduction; ${}_2F\text{o}$ est $\frac{d^2Fx}{dx^2}$ à la même condition, etc.

On trouve de la sorte

$$x^{\frac{1}{2}}\,\text{Atang}\,(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{x}{1+}\;\frac{x}{3+}\;\frac{4x}{5+}\;\frac{9x}{7+}\;\frac{16x}{9+}\;\frac{25x}{11+}\;\text{etc.}$$

Exemple plus étendu. De $fx = \text{o}$ conclure Fx en fraction continue d'une arbitraire.

$$Fx = Fa + \frac{fx - fa}{A+}\;\frac{fx - fa}{B+}\;\frac{fx - fa}{C+}\;\text{etc.}$$ à les mêmes coefficiens qu'en haut; à cela près que ${}_1F\text{o} = \frac{dFa}{dfa}$, ${}_2F\text{o} = \frac{d^2Fa}{dfa^2}$, et ainsi de suite. En supprimant fx nulle par supposition, reste

$$Fx = Fa - \frac{fa}{A -}\ \frac{fa}{B -}\ \frac{fa}{C -}\ \frac{fa}{D -}$$ etc. Retour de suite en fraction continue.

§. 16. *La Produite* $\frac{Fx}{Fa} = (1 + A\overset{1}{F}x)(1 + B\overset{2}{F}x) \ldots$ $\ldots (1 + N\overset{n}{F}x)$ etc. se traite à peu près de même. J'en ai assez dit pour une simple esquisse. Ayant donné des résultats moins limités que ceux connus jusqu'aujourdhui, j'espère avoir justifié le titre de Développement général. On me dispensera ici de l'appliquer à plusieurs variables et de montrer au long l'emploi des fonctions indépendantes qui rendent le calculateur maître de chaque terme de la suite, sans que la loi se perde. Je réserve ces details et l'amplification de la méthode pour un traité d'Analyse fonctionnaire où je prouverai, s'il en est encore besoin, que les procédés combinatoires, moins bornés et ordinairement plus directs que les différentiels, ne sont pas moins rigoureux c'est à dire, analytiques.

Sans l'analyse combinatoire, manifeste ou déguisée, le calcul fonctionnaire n'est qu'un chaos des réductions décourageantes. Oserai-je le dire? Sans l'amalgame complet des deux méthodes la logique mathémathique qu'on nomme vaguement ANALYSE n'atteindra jamais la perfection dont elle est susceptible.

III.

POLYNOME COMBINATOIRE.

On voudra bien me permettre quelques considérations préliminaires.

Le nombre est une réponse à la question: combien? D'après cette definition tirée de la nature de la quantité directe et intelligible pour tout le monde, non seulement 0, 1, 2, 3, etc., $\frac{1}{2}$, $3\frac{4}{5}$, $\sqrt{2}$, ∞, -1, $\sqrt{-1}$, etc., mais encore tant, plusieurs, quelque, etc., sont des nombres.

Au lieu d'écrire et de prononcer au long, un nombre quelconque, un autre nombre quelconque, un troisième nombre quelconque, etc., les analystes modernes se servent des lettres alphabétiques en recourant au besoin à différens alphabets, à des traits, des points et chiffres distinctifs. Quelque commode que soit cet expédient, sur tout pour l'impression, les chiffres renfermés dans un angle, un arc de cercle ou autre figure simple, sont bien supérieurs: en rendant l'algèbre toute numérique, ils aident l'oeil à découvrir les loix compliquées. Les Arabes se servirent, je crois, les premiers de ces symboles parlans qu'on a laissé tomber en désuètude, faute de connaître leurs avantages. Leibnitz et Newton ont cherché à les faire revivre pour d'autres usages: mais heureusement on ne les a pas imités, et ces signes sont en ce moment une terre vierge, dont on peut tirer un meilleur parti, comme on le verra dans mon Essai de Caractéristique Combinatoire.

Les abbréviations méthodiques étant l'âme du calcul, celles dont se sert Diophante sont assûrement plus anciennes; et malgré cela notre algèbre a été tant de siècles à se former, parce que les progrès de l'esprit humain ne se font jamais par sauts considérables. Ajoutons que beaucoup d'idées fécondes meurent dans la tête ou le portefeuille des auteurs, et que publiées le monde savant n'y fait souvent pas de longtems attention.

CARNOT, dans sa Théorie des machines, soupçonne qu'une révolution aussi heureuse que celle qu'a changé la face de la Chymie, attend les Mathématiques. Dans une science où le fond n'est pas susceptible de changement, elle ne peut avoir lieu que pour la caractéristique écrite et parlée, et tout au plus pour une méthode plus lumineuse dans les élémens : on sent depuis longtems que ceux-ci pourraient être à la fois plus riches et moins volumineux, et que les idées y pouraient quelques fois être mieux fixées. Ce n'est qu'en perfectionnant la science combinatoire qu'on y parviendra.

Chiffre signifie en général un signe de quantité élémentaire, commode pour la combinaison. Les chiffres arithméthiques, liés par des conditions de numération, sont les élemens du nombre ordinaire : les lettres, symboles de nombres indéterminés, constituent de la même manière les élémens de la fonction. Sous cet aspect les lettres de l'analyste sont des chiffres algébriques, ses fonctions sont des nombres algébriques; et l'algèbre, ou plûtôt l'analyse, est réellement une arithmétique universelle, comme NEWTON la nomma. Il s'ensuit encore qu'une fonction est le résultat éventuel de certaines opérations numériques à faire avec des nombres, dont on considère un ou plusieurs comme variables, c'est à dire, susceptibles de valeurs arbitraires.

Afin de mieux comparer les nombres et les combiner plus facilement, l'arithméticien les ordonne en série des puissances de dix, et l'algébriste les développe ordinairement en série d'une variable. Je dis, ordinairement; car souvent d'autres développemens méritent la prèférence.

Si l'on compte pour rien les longueurs, le binome Newtonien suffit pour exécuter tous les développemens: le théorème de TAYLOR aux différences finies en est une grande et utile généralisation, quoiqu'il n'évite pas toujours les circuits et qu'il laisse souvent échapper la loi. Le calcul des différences de toute espèce n'a point d'autre base. Une méthode développatoire plus sûre est l'Analyse Combinatoire ou l'Arithmétique universelle ordinale, en prenant ordinal dans le sens le plus étendu, comme adjectif d'ordre. Ce rapprochement, que personne que je sache n'a encore fait, LEIBNITZ semble l'avoir senti, à en juger par divers passages de ses oeuvres, par les coefficiens qui portent son nom et par son projet d'une idéographie numérique, au moyen de laquelle il se promettait de calculer le raisonnement. Cette ouverture fût suivie en partie par Moivre, Bernoulli et Boscowich; mais le Professeur Hindenbourg, qui pour l'étendue et la facilité des procédés laissa ses dévanciers si loin derrière lui qu'on peut dire qu'il a inventé l'Analyse Combinatoire, réalisa le premier l'idée confuse de LEIBNITZ, en rappellant toutes les règles fondamentales de la science a construire des nombres avec des chiffres donnés, individuellement ou en somme. Pour conserver à cette considération toute la généralité qui lui convient, il faut prendre etc. $+ 10^{2a} + 10^{a} + 1 + 10^{-a} + 10^{-2a} +$ etc. pour échelle de numération. En pratique a passe rarement 1 ou 2.

Après l'exécution arithmographique des règles combinatoires, HINDENBOURG a donné la lexicographique, qui ordonne les files égales ou inégales comme les mots d'un dictionnaire, et la stélégraphique, qui assemble les files horisontales d'après quelque loi dans les rangs verticaux. En attendant que je fasse mieux connaître ces différens procédés, je remarquerai que tous constituent un Calcul ordinal, ou des rapports de situation, absolument indépendant de l'analyse vulgaire, sans pourtant lui devenir étranger. J'avertis les personnes curieuses d'étudier la triple méthode de HINDENBOURG dans les ouvrages mêmes de ce savant, que ses premiers *) n'en contiennent que le germe et n'ont plus en ce moment qu'une valeur historique. Le perfectionnement de l'Analyse Combinatoire se trouve dans les cahiers de l'Archive mathématique, dont l'onzième a paru cette année, dans les première et seconde Sammlung combinatorisch analytischer Abhandlungen, publiées par HINDENBOURG et imprimées à Léipsic dans ces derniers tems. Les étrangers, qui ne savent pas l'allemand, langue aujourdhui si nécessaire à tous les gens des lettres, peuvent y suppléer par les Disquisitiones analyticae du Profefseur PFAFF, ouvrage qui a obtenu l'estime générale et qui contient près de cent pages sur cette matière.

Dans mon Traité d'Analyse fonctionnaire combinatoire, assez avancé déja pour voir peut-être bientôt le jour, j'ai tâché d'étendre le domaine des combinaisons, en les alliant intimement avec le calcul des différences. J'ai surtout été soigneux de sim-

*) Infinitinomii dignitatum historia, leges ac formulae; Göttingae 1779. Novi systematis permutationum, combinationum ac variationum primae lineae; Lipsiae 1781, etc.

plifier les deux analyses, en dégageant leurs avenues, de certaines épines qu' on leur reproche. En disant ceci, je ne prétens certainement pas jetter de l'ombre sur les travaux de mes prédécesseurs à qui je dois tout; je ne veux qu' annoncer le point de vue de mon traité. La rédaction des découvertes d' autrui est si peu de chose en elle même, que pour se la faire pardonner du public, il faut dumoins améliorer ou faciliter la forme. Au commencement d' une science tout est important et on ne saurait être trop détaillé: mais a t-elle pris consistance et veut-on la présenter en corps de doctrine, il faut s' attacher à une précision énergique et supprimer les accessoires stériles: sinon, chaque méthode devient une bibliothéque, et le studieux perd le courage de l'entâmer; principalement de nos jours, où l' homme de lettres doit savoir un peu de tout, c' est à dire, une infinité de choses. C'est plus que jamais l' occassion de s' écrier avec Hippocrate:

Ὁ βίος βραχὺς, ἡ δὲ τέχνη μακρὴ, ἡ δε κρίσις χαλεπή.

Mon traité, comme ouvrage étendu, n' est pas tout à fait dans le goût de l' échantillon combinatoire, que j' offre en attendant aux amateurs étrangers, et qui n' embrasse que cette proposition:

Dans $F(a+bx+cx^2+\text{etc.}) = Fa + A\frac{x}{1} + B\frac{x^2}{1.2} + C\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ déterminer immédiament le coefficient général N.

Le Professeur ARBOGAST a récemment résolu le problême avec une élégance qui laisse peu à désirer. Sa transformation des quantités indépendantes c, d, e, etc. en Dérivées de b, et de les différentier comme si aucune différence n' était constante, pour remettre successivement c, d, etc. à la place de leurs équivalens différentiels, est une idée éminemment ingénieuse. Cela

n'empêche point que les procédés directement combinatoires de HINDENBOURG ne mènent encore plus vîte au but. Montrons le, mais auparavant voyons jusqu'où parvient le simple calcul différentiel, afin qu'on puisse mieux juger de la différence des méthodes.

§. 1. En supposant $b + cx + dx^2 + \text{etc.} = fx$, $\frac{dFa}{da} = A'$, $\frac{d^2Fa}{da^2} = B'$, $\frac{d^3Fa}{da^3} = C'$, etc., le théorême de TAYLOR donne

$$F(a + xfx) = Fa + A\frac{x}{1} + B\frac{x^2}{1.2} + C\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

$$= Fa + A'\frac{xfx}{1} + B'\frac{(xfx)^2}{1.2} + C'\frac{(xfx)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Cette équation différentiel n fois selon x, devient

$$N + O\frac{x}{1} + P\frac{x^2}{1.2} + \text{etc.} = \frac{A'}{1}\frac{d^n(xfx)}{dx^n} + $$

$$+ \frac{B'}{1.2}\frac{d^n(x^2fx^2)}{dx^n} + \ldots .$$

$$+ \frac{N'}{1.2..n}\frac{d^n(x^nfx^n)}{dx^n} + \text{etc.}$$

d'où par x nul, condition qui annulle

$$d^n(x^{n+r}fx^{n+r}) : dx^n,$$

$$N = \frac{A'}{1}\frac{d^n(ofo)}{do^n} + \frac{B'}{1.2}\frac{d^n(o^2fo^2)}{do^n} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{N'}{1.2\ldots n}\frac{d^n(o^nfo^n)}{do^n},$$

le o signifiant ici, qu'on change x en o après la différentiation. Par le théorême $d^n(pq) = pd^nq + + \frac{n}{1}dp.d^{n-1}q + \text{etc.}$ nous obtiendrons enfin cette expression simplifiée:

$$N = \frac{n}{1} \cdot \frac{A'}{1} \frac{d^{n-1} fo}{do^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2}$$

$$\frac{B'}{1.2} \frac{d^{n-2} fo}{do^{n-2}} + \ldots + \frac{N'}{1.2..n} fo^n. \qquad (I$$

Si nous différentions $Fa + A\frac{x}{1} + \text{etc.} = Fa +$ $A'xfx + \text{etc.}$ n fois selon $d(xfx)$ constante, l'annullation de x procure $\frac{A}{1} \frac{d^n o}{d(ofo)^n} + \frac{B}{1.2} \frac{d^n . o^2}{d(ofo)^n} + \ldots$

$$\ldots + \frac{N}{1.2..n} \frac{d^n . o^n}{d(ofo)^n} = N'.$$

Remarquons que pour le cas de $x = o$, la formule conversionnelle (Dev. gén. §. 6.) change

$$\frac{d^n . x^r}{d(xfx)^n} \text{ en } \frac{d^{n-1}\left[\frac{d.x^r}{dx}\left(\frac{x-o}{xfx-ofo}\right)^n\right]}{dx^{n-1}}$$

$$= \frac{r d^{n-1}[x^{r-1}.fx^{-n}]}{dx^{n-1}}, \text{ en}$$

réduisant et nous souvenant que x seul est soumis à la différentiation. Le théorème $d^n(pq) = pd^n q + \text{etc.}$ et la substistution finale de o à x changeront cette forme en $r(n-1)(n-2)..(n-r+1) \frac{d^{n-r}.fo^{-n}}{do^{n-r}} = \frac{d^n.o^r}{d(ofo)^n}$..

Prenons successivement $r = 1, = 2$, etc. et substituons, il vient enfin $N' = A \frac{d^{n-1}.fo^{-n}}{do^{n-1}} + \frac{n-1}{1}$.

$$B \frac{d^{n-2}.fo^{-n}}{do^{n-2}} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}. C \frac{d^{n-3}.fo^{-n}}{do^{n-3}}$$

$$+ \ldots + N.fo^{-n}. \qquad (II$$

Les rélations réciproques I et II sont remarquables en ce que F et f caractérisent des fonctions quelconques.

L'évaluation de $\frac{d^{n-r}.fo^{n}}{do^{n-r}}$ et $\frac{d^{n-r}.fo^{-n}}{do^{n-r}}$ se réduit a élever $fx = b + cx + dx^2 +$ etc. aux puissances r et — n pour ne conserver des développemens respectifs que le coefficient de x^{n-r} multiplié par 1. 2. 3. . n—r. Au moyen du calcul différentiel on obtient assez facilement ce coefficient en série récurrente: mais comme ce n'est pas ce que nous voulons, passons aux procédés combinatoires.

§. 2. Le développement de fo^r se chargeant de coefficiens numériques qui embrouillent bientôt la loi, partons d'un produit de séries différentes, et pour rendre l'éxecution typographique moins sujette à equivoque, prenons X pour variable. Nous aurons tant de séries que nous voudrons au moyen de la notation suivante en coefficiens Leibnitziens.

$$\overset{q}{X} = \overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + \overset{q}{3}.X^3 + + \overset{q}{N}.X^N + \text{etc.} \; ^{*})$$

N sera toujours le coefficient de X^N. La série définie

$$\overset{q}{t}.X^t + .\overset{q}{t \dagger 1}.X^{t+1} + .\overset{q}{t \dagger 2}.X^{t+2} + + \overset{q}{u}.X^u$$

s'indiquera par $t\overset{q}{X}u$, et son coefficient général par $t\overset{q}{N}u$. Dans cette expression je nommerai constamment q la

* Pour faciliter aux étrangers la lecture immédiate des ouvrages combinatoires de HINDENBOURG, j'expliquerai sa notation aux endroits convenables de cet écrit, qui en deviendra d'autant plus intelligible pour les géomètres - combinateurs allemans. ϰ1, ϰ2. . ϰn designent Coefficient premier, second. . , nieme

*) $\overset{q}{X} = \overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + + \overset{q}{N}.X^N +$ etc. est chez HINDENB.

$p = \varkappa 1.x + \varkappa 2.x^2 +$ etc. et $\overset{q}{N}$ est $p\varkappa n$ chez lui.

$\overset{q}{{}_t X}{}^{(d)}_{u} = .\overset{q}{t}.X^t + .\overset{q}{t+d}.X^{t+d} + + \overset{q}{u}.X^u$ est chez H.

$y = Ax^m + Bx^{m+d} + + \overset{nd}{A}x^{m+nd} +$ etc.

marque, t et u les indices. La marque équivaut à des traits. $\overset{4}{N} = N''''$.

Si la différence des exposans était d, on noterait $_t\overset{q}{X}{}^{(d)}_u$ et $_t\overset{q}{N}{}^{(d)}_u$. Ces formes sont un peu chargées, parce qu'elles apprennent cinq circonstances de la série.

Exemples. $\overset{0}{X} = \overset{0}{1}.X + \overset{0}{2}.X^2 + \overset{0}{3}.X^3 + \text{etc.},$

$$_2\overset{1}{X} = \overset{1}{2}.X^2 + \overset{1}{3}.X^3 + \overset{1}{4}.X^4 + \text{etc.},$$

$$_0\overset{2}{X}_3 = \overset{2}{0} + \overset{2}{1}.X + \overset{2}{2}.X^2 + \overset{2}{3}.X^3 +,$$

$$\overline{X}{}^{(3)}_{10} = \overline{1}.X + \overline{4}.X^4 + \overline{7}.X^7 + \overline{10}.X^{10},$$

$$_5\dot{X}{}^{(\not{7})}_{\not{9}} = \dot{5}\,X^5 + \dot{\not{2}}.X^{-2} + \dot{\not{9}}.X^{-9};$$

Les chiffres barrés, dont on ne se sert plus dans la division, signifient chez moi des chiffres négatifs. Ainsi $\not{2}$, $\not{5}$, $\not{7}$, $\not{9}$, équivalent à -2: -5, -7, -9; $\not{8}00\not{8}00\not{8} = 7991992$, $L\,\frac{1}{2000} = \not{4}, 3010300$. La caractéristique barrée n'induit jamais les commençans en erreur comme le complément arithmétique. Je donnerai dans une autre occasion le calcul extrêmement rapide des chiffres négatifs, par lequel on extrait en trois minutes une racine quarrée de douze figures.

§. 3. Pour abréger avec clarté une fonction d'une ou de plusieurs séries marquées, je surmonterai leur variable commune de la même fonction de leurs marques: moyennant quoi

$$F\overset{q}{X} = \overset{Fq}{X} = \overset{Fq}{0} + \overset{Fq}{1}.X + \overset{Fq}{2}.X^2 + + \overset{Fq}{N}.X^N + \text{etc.} \quad *)$$

$\overset{Fq}{N}$ est donc le coefficient de X^N dans le développe-

*) $F\overset{q}{X} = \overset{Fq}{X} = \text{etc.} + \overset{Fq}{N}.\,X^N + \text{etc.}$ est chez H. $Fp = \kappa 0 + \kappa 1.x + \kappa 2.x^2 + \text{etc.}$ et mon $\overset{Fq}{N}$ est son $(Fp)\kappa N$.

ment de la fonction d'une série dont les coefficiens sont marqués de q traits.

$$F(\overset{p}{X},\overset{q}{X}) = \text{etc.} + \overset{F(p,q)}{N}\,.\,X^N + \text{etc.}$$ Ainsi de suite

Exemples.

$$\overset{p}{X}.\overset{q}{X} = \overset{pq}{X} = \overset{pq}{2}.X^2 = \overset{pq}{3}.X^3 + + \overset{pq}{N}.X^N + \text{etc.}$$

$$\overset{p}{X}:\overset{q}{X} = \overset{p:q}{X} = \overset{p:q}{0} + \overset{p:q}{1}.X + \overset{p:q}{2}.X^2 + + \overset{p:q}{N}.X^N + \text{etc.}$$

$$\overset{1}{X}.\overset{r-1}{X}.\overset{r-2}{X}\dots\overset{1}{X} = \overset{1..1}{X} = \overset{r..1}{r}.X^r + .\overset{r..1}{r+1}.X^{r+1} + + \overset{r..1}{N}.X^N + \text{etc.}$$

En prenant toutes les marques q, ce produit de séries devient une puissance et on a

$$(\overset{q}{X})^r \text{ ou } \overset{q}{X}{}^r = \overset{q^r}{X} = \overset{q^r}{r}.X^r + .\overset{q^r}{r+1}.X^{r+1} + + \overset{q^r}{N}.X^N + \text{etc.}$$

$$({}_0\overset{q}{X})^{-r} \text{ ou } {}_0\overset{q}{X}{}^{-r} = {}_0\overset{q-r}{X} = \overset{q-r}{0} + \overset{q-r}{1}.X + \overset{q-r}{2}.X^2 + + .{}_0\overset{q-r}{N}.X^N + \text{etc.}$$

L se lisant „*Logarithme naturel de*" $L^2 a$ est, par les principes fonctionnaires du Développement général, la même chose que LLa et $L^{-1}a$ équivaut à $2{,}71828183^a$. Ceci suffit pour comprendre

$$L({}_0\overset{q}{X}) = {}_0\overset{Lq}{X} = \overset{Lq}{1}.X + \overset{Lq}{2}.X^2 + + .{}_0\overset{Lq}{N} + \text{etc.}$$

$$L^{-1}(\overset{q}{X}) = \overset{L^{-1}q}{X} = 1 + \overset{L^{-1}q}{1}.X + \overset{L^{-1}q}{2}.X^2 + + \overset{L^{-1}q}{N}.X^N + \text{etc.}$$

Voilà assez d'éclaircissemens. Ma tachygraphie parlante, où chaque coefficient porte sa généalogie au front, est analytique autant que combinatoire. Dans l'Essai de Caractéristique Combinatoire, ouvrage dont je grave actuellement les planches, j'ai étendu cette notation à plusieurs variables, et au moyen du cadre $\overline{|\;\;|}$, je l'ai tellement preservée d'équivoque qu'on peut, dans les grands calculs, mêler, sans avertissement, les fonctions combinatoires avec les fonctions analytiques ordinaires. Les formes tronquées

aux quelles m'oblige l'impression, me suffisent aujourdhui, et avec un peu d'attention le lecteur ne s'y trompera point.

$\bar{X} = \bar{1}.X ++ \bar{N}.X^N +$ etc. est $\overline{|x|} = \overline{|1|}\,x ++ \overline{|n|}\,x^n +$ etc.

dans les formes à cadres. Mais revenons à $\overset{r..1}{N}$ et $\overset{q^r}{N}$.

§. 4. Dans $\overset{r..1}{X} = \overset{r..1}{r}.X^r + \overset{r..1}{r+1}.X^{r+1} ++ \overset{r..1}{N}.X^N +$ etc.*)

$\overset{r..1}{N}$ consiste en une somme de produits r^{naires} ou de r facteurs, et la somme des numéros de chaque r^{naire} y est toujours l'exposant de X^N. Il n'y a donc qu'à écrire tous le nombres r^{naires} à somme N des chiffres, les surmonter par ordre des marques r, $r-1$, $r-2$, jusques 1, et leur préposer enfin $+$, pour avoir la valeur de $\overset{r..1}{N}$. Les chiffres dont je parle appartiennent à l'échelle etc. $+ 10^{2a} + 10^a + 1$.

Exemple 1r. On demande le coefficient de X^7 du développement de

$$\overset{3..1}{X} = (\overset{3}{1}.X + \overset{3}{2}.X^2 + \text{etc.})\ (\overset{2}{1}.X + \text{etc.})\ (\overset{1}{1}.X + \text{etc.}).$$

N = 7 donne ici

$$\begin{array}{llllll} \overset{3..1}{7} = + & \overset{321}{115} + & \overset{321}{214} + & \overset{321}{412} + & \overset{321}{511}. \\ & 124 & 223 & 421 & \\ & 133 & 232 & & \\ & 142 & 241 & & \\ & 151 & & & \end{array}$$

Les marques 3, 2, 1 et le signe $+$ sont censés répétés à chaque produit. Je l'avertis une fois pour tou-

*) $\overset{r..1}{X} = \overset{r..1}{r}.X^r ++ \overset{r..1}{N}.X^N +$ etc. est chez H.

$u..rqp = ur.X^r + u(r+1).X^{r+1} +$ etc., et $\overset{r..1}{N}$ est chez lui $(u..qp)un$ en avertissant que les séries multipliées sont au nombre de r.

tes. On sait que $\overset{3}{1}\overset{2}{1}\overset{1}{5} = \overset{3}{1}.\overset{2}{1}.\overset{1}{5}$, et ainsi des autres. La suppression des points ne peut occasionner de l'ambiguité.

Quant à la meilleure manière de trouver tous les nombres r^{naires} à somme donnée des chiffres, c'est d'écrire, comme j'ai fait, d'abord le plus petit nombre, puis l'immédiatement plus grand, puis le suivant; on continue de la sorte jusqu'à ce qu'on parvient au premier r^{naire} renversé, et il en résulte une Colonne rangée, c'est à dire, de nombres ascendans. Lorsque la colonne devient longue, on peut la rompre en sections.

Cette solution du problême ne laisse rien à désirer pour la simplicité: elle est, comme on voit, une conséquence de ma notation Leibnitzienne, qui, pour être à la fois analytique et combinatoire, ne demande ni traduction ni explication.

$\overset{p}{1}$, $\overset{p}{2}$, etc.; $\overset{q}{1}$, $\overset{q}{2}$, etc., équivalent à a, b, etc. marqués de p ou q traits, avec la différence pourtant que les nombres constituent un ordre plus expressif que celui des lettres, et que leur suite n'est pas bornée comme celle des alphabets. *) La marque empêche de confondre le coefficient Leibnitzien, nombre quelconque, avec les nombres vulgaires, et $3.\overset{9}{8}$ n'en est pas moins clair que $3h''''''''''$ ou $3h^{\text{IX}}$. Ici il faut même souvent un d'avertissement pour discerner l'indice d avec un exposant.

*) Hindenbourg qui a su tirer tout le parti possible des lettres, aggrandit indéfiniment les alphabets, en notant $\overset{+q}{N}$ la q^{ieme} lettre après N, et $\overset{-q}{N}$ la q^{ieme} lettre précédente. Dans ma notation à cadres ce serait $|n+q|$ et $|n-q|$; $|n|$ équivalant à N.

Exemple 2^e. Construire le coefficient de X^{22} dans le développement de $\overset{4..1}{X}{}^{(3)}_{10} =$

$$(\overset{4}{1}.X+\overset{4}{4}.X^4+\overset{4}{7}.X^7+\overset{4}{10}.X^{10})\,(\overset{3}{1}.X++\overset{3}{10}.X^{10})$$
$$(\overset{2}{1}.X+\text{etc.})\,(\overset{1}{1}.X+\text{etc.}).$$

Ce coefficient est $\overset{4..1}{22}{}^{(3)}_{10} =$

4 3 2 1	4 3 2 1	4 3 2 1	4 3 2 1
+ 1.1.10.10	+ 4.1.7.10	+ 7.1.4.10	+ 10.1.1.10
1.4.7.10	4.1.10.7	7.1.7.7	10.1.4.7
1.4.10.7	4.4.4.10	7.1.10.4	10.1.7.4
1.7.4.10	4.4.7.7	7.4.1.10	10.1.10.1
1.7.7.7	4.4.10.4	7.4.4.7	10.4.1.7
1.7.10.4	4.7.1.10	7.4.7.4	10.4.4.4
1.10.1.10	4.7.4.7	7.4.10.1	10.4.7.1
1.10.4.7	4.7.7.4	7.7.1.7	10.7.1.4
1.10.7.4	4.7.10.1	7.7.4.4	10.7.4.1
1.10.10.1	4.10.1.7	7.7.7.1	10.10.1.1
	4.10.4.4	7.10.1.4	
	4.10.7.1	7.10.4.1	

§. 5. $\overset{q^r}{N}$, coefficient général du développement de $\overset{q^r}{X} = (\overset{q}{1}.X+\overset{q}{2}.X^2+\overset{q}{3}.X^3+\text{etc.})^r$ ne differe de $\overset{r..1}{N}$, qu'en ce que toutes les marques sont q, ce qui rend égaux les facteurs à même numéro. Il suffira donc d'écrire les r^{naires} rangés, à somme N des numéros-chiffres, en préposant à chaque r^{naire} le + et le nombre des permutations, dont ses numéros sont susceptibles.

J'entens par r^{naire} rangé un nombre de r chiffres dans lequel un chiffre moindre ne suit jamais un plus grand 2359, 6666, 4477 sont des 4^{naires} rangés;

844222 est un 6^{naire} rangé à rebours; 511, 1409, 31204 ne sont rangés dans aucun sens.

Exemple 1[r]. On veut savoir le coefficient de X^7 du développement de $\overset{q^3}{X} = (\overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + \text{etc.})^3$. La forme du paragraphe précédent, nous donne tout de suite en employant les coefficiens numériques de permutations,

$$\overset{q^3}{7} = 3.\overset{qqq}{115} + 6.\overset{qqq}{124} + 3.\overset{qqq}{133} + 3.\overset{qqq}{223}$$

$$= 3.\overset{q}{1}{}^2.\overset{q}{5} + 6.\overset{q}{1}.\overset{q}{2}.\overset{q}{4} + 3.\overset{q}{1}.\overset{q}{3}{}^2 + 3.\overset{q}{2}{}^2.\overset{q}{3}$$

C'est sans doute une précaution superflue que d'avertir que $\overset{q}{1}{}^2$ et $\overset{q}{3}{}^2$, quarrés de $\overset{q}{1}$ et $\overset{q}{3}$, ne doivent pas se prendre pour $\overset{q^2}{1}$ et $\overset{q^2}{3}$, coefficiens du développement de $\overset{q^2}{X} = (\overset{q}{1}.X + \text{etc.})^2$.

Exemple 2[d]. Dans $\overset{q^3}{X}{}^{(3)}_{10}$ déterminer le coefficient de X^{22}. Il est, en mettant un coefficient de permutation à chaque 4^{naire} rangé du second exemple du §. 4,

$$\overset{q}{22}{}^{(3)}_{10} =$$

$$6.\overset{q}{1}{}^2.\overset{q}{10}{}^2 + 24.\overset{q}{1}.\overset{q}{4}.\overset{q}{7}.\overset{q}{10} + 4.\overset{q}{1}.\overset{q}{7}{}^3 + 6.\overset{q}{4}{}^2.\overset{q}{7}{}^2 + 4.\overset{q}{4}{}^3.\overset{q}{10}.$$

Dans ces deux exemples nous avons déduit les coefficiens numériques 3, 6, 3. 3 et 6, 24, 4, 6, 4, de la permutation réelle. Comme ce procédé mettroit bientôt des bornes aux solutions praticables, on sent combien il serait avantageux de n'écrire que les seuls numéros-nombres rangés et de leur préposer de tête, ou avec peu de calcul, les coefficiens de permutation. Développons donc cette théorie, où la plus grande gé-

néralité aura encore la prérogative de mieux présenter la loi.

§. 6. Arranger m chiffres différens en r^{naires}.

2^{naires}. Un des m chiffres ayant la gauche, les $m-1$ chiffres restans formeront autant de binaires avec lui. Mais chacun des m chiffres peut avoir la gauche: donc en tout $m(m-1)$ binaires possibles.

3^{naires}. Un des m chiffres ayant la gauche, les $m-1$ restans formeront $(m-1)(m-2)$ binaires à sa droite, et partant autant de ternaires avec lui. Et comme chaque chiffre peut avoir la gauche, le total des 3^{naires} est $m(m-1)(m-2)$.

4^{naires}. Un des m chiffres ayant la gauche, les $m-1$ restans formeront $(m-1)(m-2)(m-3)$ ternaires à sa droite, et partant autant de quaternaires avec lui. Et comme chaque chiffre peut avoir la gauche, le total des 4^{naires} est $m(m-1)(m-2)(m-3)$.

Le raisonnement demeurant le même pour les 5^{naires}, 6^{naires}, etc., et le nombre des facteurs régulièrement decroisans étant toujours celui des places, il en résulte le théorême suivant, qui est la base de toute l'Analyse Combinatoire de quantité.

„*m chiffres peuvent s'arranger en n^{naires} de $m(m-1)(m-2)\,..\,(m-n+1)$ manières.*“

Comme on peut numéroter chaque suite d'individus et supposer un ordre dans des places situées où l'on veut, la solution a toute la généralité imaginable. On n'oubliera pas que les chiffres dont je parle appartiennent au systeme 10^{a}.

Si la recherche du nombre des r^{naires} appartient à l'analyse de quantité, celle de la forme des r^{naires} est du ressort de l'analyse de qualité, science qui est encore au berceau, à bien des égards.

On arrange le mieux en r^{naires} en partant toujours des chiffres les plus bas; et alors la marche que j'ai suivie en démontrant, donne une colonne rangée. Quand elle est construite, on verifie son éxactitude par le nombre connu des arrangemens. L'exercice apprend les règles partielles plus vîte qu'un énoncé verbal qui ne saurait être court.

Exemple d'analyse de quantité. On a les 25 lettres de l'alphabet dans une urne: en tirant dix fois de suite une lettre, quelle probabilité y a-t-il qu'on obtiendra le mot bonefacius, dont beaucoup de marchands se servent au lieu de 0123456789 pour cryptographer leurs prix?

Le nombre des 10^{naires} possibles avec 25 numéros-chiffres est 25. 24. 23. 22. 21. 20. 19. 18. 17. 16, parmi lesquels il n'y a que le seul 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 qui puisse former bonefacius. En faisant le calcul on trouvera donc la probabilité

1 : 11861676287999

Si 1000 écrivains livraient chacun 10000 dénaires par jour, il leur faudrait plus de 3249 années pour les écrire tous.

Quand nous voyons de l'ordre dans une longue suite de choses qui pourraient être disposées autrement, notre raison en conclut un dessein; c'est à dire une intelligence qui a présidé à leur arrangement: plus le nombre des dispositions possibles est grand, plus les époques où elles reviennent sont fréquentes, plus la conclusion acquiert du poids. Comme tout ce que nous appercevons dans le monde physique porte ce caractère expressif d'ordre qui dure depuis un tems infini; il y a donc ∞^{∞} à parier contre 1 que l'ordre que nous appercevons dans le monde n'est pas l'effet d'une fatalité aveugle. Mais, dit le *Système de la Nature*, puisque les choses doivent être arrangées de quelque ma-

nière, il ne faut pas s'étonner qu'elles le soient de la manière actuelle: tout étant conséquence de loix nécessaires, les phénomènes qui annoncent le plus de dessein, tels que la structure des corps organiques, la conservation des espèces, ne sont au fond qu'un résultat surprenant obtenu par des dés pipés. L'auteur oublie que des dés pipés prouvent une intelligence qui les a pipés et que notre raison juge d'après la probabilité et non d'après l'événement. Aussi, malgré toutes les objections, le dessin manifeste que présente un oeil, un pied, une aile, etc., démontre un être suprême. Cette preuve, sans contredit la meilleure de toutes, est due à la théorie des combinaisons.

Exemple d'analyse de qualité. Déterminer les amalgames possibles à trois, en quotités différentes données, des métaux les plus pésans; le platine, l'or, le tungstène et le mercure.

Numérotons ces métaux 1, 2, 3, 4 et désignons les quotités par les marques arbitraires 1, 2, 3, nous trouverons $4 . 3 . 2 = 24$ amalgames possibles, que voici:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & 321 & & 321 & & 321 & & 321 & \\
+ & 123 & + & 213 & + & 312 & + & 412 & {}^{*)} \\
 & 124 & & 214 & & 314 & & 413 & \\
 & 132 & & 231 & & 321 & & 421 & \\
 & 134 & & 234 & & 324 & & 423 & \\
 & 142 & & 241 & & 341 & & 431 & \\
 & 143 & & 243 & & 342 & & 432 &
\end{array}$$

Si l'on refléchit que nous connaissons déja une vingtaine de metaux, et que les quotités différentes varient tant les amalgames, on sentira combien d'expérien-

*) HINDENBOURG indique ce résultat par C`·[1 2 3 4]; C trosième lettre de l'alphabet indiquant qu'on assemble à 3: Chez lui N`[1 2 3 . . m] est la colonne des n^{naires} formés des chiffres 1 jusques m, qu'il nomme *Variationes simpliciter, omissis repetitionibus.*

ces il faudroit pour avoir une théorie un peu complette des composés variables 2^{naires}, 3^{naires}, 4^{naires}, etc.

§. 7. *Corollaire.* Lorsque le nombre des places est celui des chiffres, l'arrangement se réduit à une simple permutation, et $m = n$ donne ce théorême sécondaire: „n chiffres différens produisent $1.2.3..n$ nombres n^{naires} par transposition.“ *)

Exemple. 0149 peuvent ainsi se permuter sur quatre places de $1.2.3.4 = 24$ manières

+ 0149	+ 1049	+ 4019	+ 9014
0194	1094	4091	9041
0419	1409	4109	9104
0491	1490	4190	9140
0914	1904	4901	9401
0941	1940	4910	9410

La seconde moitié de la colonne est la première disposée à rebours pour la suite des 4^{naires} et l'ordre de leurs chiffres.

Pour en donner une application, voyons quelles sont les arrangemens permis de ces quatre mots: omnia vincit labor improbus. En les numérotant 0, 1, 4, 9 nous trouverons que les 24 arrangemens ci-dessus donnent tous un sens clair. La traduction française, un travail opiniâtre surmonte chaque difficulté, et l'allemande, eine unermüdete Arbeit besiegt jede Schwierigkeit ne souffrent point de transposition: il en est de même dans toutes les autres langues européennes vivantes, les dialectes slaves exceptés, qui ont des cas réels. En conclure que le poëte latin, dont j'ai tiré cette sentence ait eu dans sa langue plus souple plus de facilité à faire de bons vers que les poëtes modernes, serait assurément abuser des combinaisons. VIRGILE n'avait pour modèle

*) HINDENB. note N° [123..n] ou Perm [123..n]

que le sublime, mais incorrect HOMÈRE: il travailla toute sa vie à l'Enéide et voulut qu'on la brûlât après sa mort; preuve que les Romains d'Auguste n'étaient pas moins delicats que nous.

§. 8. *Corollaire.* Dans le §. 6. chaque arrangement des mêmes chiffres revient dans ses $1.2.3..n$ permutations dont une seule est rangée. Le nombre des n^{naires} rangés est donc $1.2..n$ fois moindre que $m(m-1)$ $.(m-n+1)$, et partant:

„m chiffres différens donnent $\frac{m(m-1)(m-2)..(m-n+1)}{1 . 2 . 3 ... n}$ nombres n^{naires} rangés."

Exemple Ier.

Soit $\underset{k}{X} = (1 + \dot{1}.X)(1 + \dot{2}.X)(1 + \dot{3}.X) .. (1 + \dot{k}.X)$, le coefficient de la puissance X^N du développement sera $\underset{k}{N} =$ à la somme des N^{naires} rangés des chiffres Leibnitziens $\dot{1}, \dot{2}, , \dot{k}$.

Ainsi $\underset{8}{6} = + \dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{4}\dot{5}\dot{6} + \dot{1}\dot{2}\dot{5}\dot{6}\dot{7}\dot{8}$ les points et le + étant censés répétés à chaque 6^{naire}.

123456	125678
123457	134567
123458	134568
123467	134578
123468	134678
123478	135678
123567	145678
123568	234567
123578	234568
123678	234578
124567	234678
124568	235678
124578	245678
124678	345678

en tout $\frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6} = 28$ sextinaires.

Supposons $\dot{1} = \dot{2} =$ etc. $= 1$, chaque N^{naire} deviendra l'unité, et on aura

$$\underset{k}{N} = \frac{k}{1} \cdot \frac{k-1}{2} \cdot \frac{k-2}{3} \cdot \cdot \frac{k-N+1}{n}$$

Donc pour ce cas,

$$(1+X)^k = 1 + \underset{k}{1} . X + \underset{k}{2} . X^2 + \underset{k}{3} . X^3 + \text{etc.} \quad {}^{*)}$$

$$= 1 + \frac{k}{1} . X + \frac{k(k-1)}{1.2} . X^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3} X^3 + \text{etc.}$$

Cette élégante démonstration élémentaire du binome est dûe à BERNOULLI et je n'en connais pas encore de meilleure: elle suppose k entier positif, mais il est aisé de l'étendre à k négatif, rompu et même irrationnel. ARBOGAST a traité ce problème par les dérivations, page 74 et 75.

Exemple 2^d. Une application non moins connue, mais qu'il est bon de repéter encore plus souvant, c'est la théorie des loteries génoises.

Une roue de fortune, faisant l'office d'urne, contient 90 numéros dont on tire 5. On demande la probabilité d'en deviner un, deux, trois, quatre, cinq de ces numéros.

*) Les coefficiens binomiens $\underset{k}{1}, \underset{k}{2}, \underset{k}{3}, , \underset{k}{N}$ sont chez HIND. $^k\mathfrak{A}$, $^k\mathfrak{B}$, $^k\mathfrak{C}$, , $^k\mathfrak{N}$. Dans ma notation a cadres, j'ai des formes plus systématiques qu'ici.

*) 90 numéros mis donnent		5 num. tirés donnent
$\frac{90}{1}$.	1^{naires} rangés	$\frac{5}{1}$
$\frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2}$.	2^{naires}	$\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$
$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.	3^{naires}	$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
$\frac{90 \cdot \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.	4^{naires}	$\frac{5 \cdot \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$
$\frac{90 \cdots 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$.	5^{naires}	$\frac{5 \cdots 1}{1 \cdots 5}$

*) HINDENBOURG écrit les 1^{naires}, 2^{naires}, 3^{naires} etc. rangés, sans répétition, A`, B`, C`, etc. En général son système de notation porte sur les bases suivantes :

La romaine droite annonce des files rangées A, B, C,, N.
(Combinationes)

La romaine inclinée annonce des files permutées *A*, *B*, *C*,, *N*.
(Variationes)

La moitié dextre de l'accent circonflexe avertit qu'on ne répète pas de chiffre ou de lettre dans la file
A`, B`,, N` ; *A*`, *B*`,, *N*`.

La moitie gauche de l'accent circonflexe avertit qu'on répète des chiffres ou lettres dans la file
'A, 'B,, '¯N; '*A*, '*B*,, '*N*.

Les ¯N et *N* d'alphabets écrits servent à distinguer les files d'un nombre quelconque de chiffres ou lettres, de N et *N* caractéristiques de files 13^{naires}. Comme ceux-ci ne se rencontrent presque jamais en pratique, j'aurais préféré N et *N* pour une classe quelconque ; les correspondantes écrites nuisant à l'unité du système, outre qu'elles sont rarement d'une belle exécution typographique. Mais l'auteur a eu d'autres raisons.

Quand le nombre des choses combinées ou permutées (combinatae vel variatae) est à somme donnée de leurs numéros ou indices, on met cette somme au haut de la gauche. ^{m}¯N` et $^{m}$*N*`, ^{m}¯N et ^{m}*N*. Pour faire connaitre ces choses, on accompagne la lettre combinatoire d'un Index $\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ a & b & c & \ldots & n \end{matrix}\right]$ qui se pose ordinairement au dessous.

il en resulte les rapports			les loteries qui donnent le plus payent.
1 : 18	par 1^{nairs} ou extrait		15
1 : 400½	par 2^{nairs} ou ambe		300
1 : 11784	par 3^{nairs} ou terne		6000
1 : 511038	par 4^{nairs} ou quaterne		60000
1 : 43949268	par 5^{nairs} ou quine		100000

Comparaison faite, on trouve une perte probable de la mise

par extrait	$\frac{1}{6}$	
par ambe	$\frac{1}{4}$	à peu prés
par terne	$\frac{1}{2}$	— —
par quaterne	$\frac{7}{8}$	— —
par quine	$\frac{438}{439}$	— —

Il n'en faut pas davantage pour prouver l'inconséquence de ceux qui veulent forcer la fortune dans ce jeu. Sans doute on peut aventurer une somme modique quand la loterie a un but utile: mais il sera toujours sage de n'en pas contracter le goût.

Ne pas tolérer des loteries dans un pays n'est pas le moyen d'en prévenir les abus, parce que les collecteurs étrangers n'en sont que plus actifs clandestinement, pour gagner une provision de 10 à 15 pour cent. Le meilleur serait que le gouvernement tînt une loterie en régie qui payat à un taux plus haut que les loteries étrangères, en imprimant sur chaque billet le desavantage des chances et cet anathême combinatoire:

„Il n'y a qu'un fou qui puisse vouloir s'enrichir aux jeux de hazard, et qu'un malhonnête homme qui puisse y risquer le bien-être de sa famille."

§. 9. *Corollaire du* §. 7. Si parmi les n chiffres permutés, il s'en trouve r égaux, les $1.\ 2.\ 3..\ r$ permutations de ceux-ci ne donnant qu'une seule forme, le nombre total des permutations s'abaisse à

$$\frac{1.\ 2.\ 3..\ n}{1.\ 2.\ 3..\ r} = (r+1)\,(r+2)\,(r+3)\,..\,n.$$

Et si s chiffres deviennent encore égaux entr'eux, mais non avec les précédens, il faudra de nouveau diviser le résultat obtenu par $1.2.3..s$. En général

„Pour trouver de combien de manières on peut per-„muter n chiffres dont plusieurs grouppes d'égaux, „divisez $1.\ 2.\ 3..\ n$, par 2 pour chaque chiffre dou-„ble; par 2. 3 pour chaque chiffre triple; par 2. 3. 4 pour chaque quadruple; et ainsi de suite."

Il est palpable que le résultat ne saurait être qu'un nombre entier.

Exemple. Dans un voyage quelqu'un a passé une fois à Londres, deux fois à Paris et trois fois à Rome: quelles sont les manières, dont il a pû faire cette tournée?

En désignant Londres par $\dot{8}$, Paris par $\dot{4}$ et Rome par $\dot{2}$, on a

$$\dot{2}\,\dot{2}\,\dot{2}\,\dot{4}\,\dot{4}\,\dot{8} \text{ susceptible de } \frac{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}{2.\ 3 \times 2} = 60$$

sextinaires à répétition.

					
+	222448	+	244822	+	428242
	222484		248224		428422
	222844		248242		442228
	224248		248422		442282
	224284		282244		442822
	224428		282424		448222
	224482		282442		482224
	224824		284224		482242
	224842		284242		482422
	228244		284422		484222
	228424		422248		822244
	228442		422284		822424
	242248		422428		822442
	242284		422482		824224
	242428		422824		824242
	242482		422842		824422
	242824		424228		842224
	242842		424282		842242
	244228		424822		842422
	244282		428224		844222

On voit par cette application combien peu vraisemblable est la détermination de faits historiques dont les dates et même la succession manquent.

Exemple 2[d]. Trouver le coefficient de permutation d'un produit de puissances,

$$1^{-\dot{1}} \cdot 2^{-\dot{2}} \cdot 3^{-\dot{3}} \cdot 4^{-\dot{4}} \cdot \cdot \cdot k^{-\dot{k}} \, .$$

La somme $\dot{1} + \dot{2} + \dot{3} + \; + \dot{k}$ étant celle des choses à permuter, le nombre des formes possibles est

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \, \ldots\ldots\ldots \, (\dot{1}+\dot{2}+\dot{3}++\dot{k})}{1.2..\dot{1} \times 1.2..\dot{2} \times 1.2..\dot{3} \times 1.2..\dot{4} \times\times 1.2..\dot{k}}$$

$$= \frac{(\dot{1}+1)(\dot{1}+2)\ldots.(\dot{1}+\dot{2}++\dot{k})}{1.2..\dot{2} \times 1.2..\dot{3} \times\times 1.2..\dot{k}}$$

Cette formule est d'un grand usage dans l'Analyse Combinatoire.

§. 10. Nous voilà donc en état de trouver sur le champ le coefficient de permutation d'un n^{naire} donné, ce qui manquait à la solution du §. 5. Dans la plupart des cas pratiques ce coefficient s'écrit de tête.

Exemples. *)

$$\overset{q^4}{9} = \left.\begin{array}{r|cccc} & q & q & q & q \\ +4 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 12 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ 12 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 12 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 12 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} 4\cdot \overset{q}{1}{}^{3}\cdot \overset{q}{6} + 12\cdot \overset{q}{1}{}^{2}\cdot \overset{q}{2}\cdot \overset{q}{5} \\ + 12\cdot \overset{q}{1}{}^{2}\cdot \overset{q}{3}\cdot \overset{q}{4} + 12\cdot \overset{q}{1}\cdot \overset{q}{2}{}^{2}\cdot \overset{q}{4} \\ + 12\cdot \overset{q}{1}\cdot \overset{q}{2}\cdot \overset{q}{3}{}^{2} + 4\cdot \overset{q}{2}{}^{3}\cdot \overset{q}{3} \end{array}\right.$$

**)

$$\begin{aligned} \overset{q^6}{13} = {} & 6\cdot \overset{q}{1}{}^{5} \overset{q}{8} + 30\cdot \overset{q}{1}{}^{4} \overset{q}{2} \overset{q}{7} + 30\cdot \overset{q}{1}{}^{4} \overset{q}{3} \overset{q}{6} + 30\cdot \overset{q}{1}{}^{4} \overset{q}{4} \overset{q}{5} \\ & + 60\cdot \overset{q}{1}{}^{3} \overset{q}{2}{}^{2} \overset{q}{6} + 120\cdot \overset{q}{1}{}^{3} \overset{q}{2} \overset{q}{3} \overset{q}{5} + 60\cdot \overset{q}{1}{}^{3} \overset{q}{2} \overset{q}{4}{}^{2} \\ & + 60\cdot \overset{q}{1}{}^{3} \overset{q}{3}{}^{2} \overset{q}{4} + 60\cdot \overset{q}{1}{}^{2} \overset{q}{2}{}^{3} \overset{q}{5} + 180\cdot \overset{q}{1}{}^{2} \overset{q}{2}{}^{2} \overset{q}{3} \overset{q}{4} \\ & + 60\cdot \overset{q}{1}{}^{2} \overset{q}{2} \overset{q}{3}{}^{3} + 60\cdot \overset{q}{1} \overset{q}{2}{}^{3} \overset{q}{3}{}^{2} + 6\cdot \overset{q}{2}{}^{5} \overset{q}{3}. \end{aligned}$$

Comme le lecteur est déjà familiarisé avec la notation, je peux m'épargner les répétitions et distinctions oiseuses; ce qui abrége considérablement l'énoncé. Quiconque a de la routine écrit ces développemens de suite, aussi mécaniquement qu'une multiplication ou une division numérique.

*) Chez HINDENBOURG cette fonction combinatoire se note $\mathfrak{d}^{9}D$; la 4^{me} lettre de l'alphabet indiquant des quaternaires, et le 9 au haut de la gauche, qu'ils sont à somme 9. La majuscule droite apprend que les files sont rangées (*complexiones rite ordinatae*) et la minuscule allemande homonyme avertit que chaque file est accompagnée de son coefficient de permutation. Il me semble impossible d'être plus court et plus expressif en caractères alphabétiques.

**) Chez HINDENB. $\mathfrak{f}^{13}F$.

Cette méthode de considérer séparément les produits et leurs coefficiens numériques, pour les poser ensuite tout d'un coup, est incomparablement plus expéditive qu'en les évaluant ensemble par des procédés successifs, d'autant plus sujets à caution qu'il en a fallu d'avantage. Mais quoique cette évaluation directement combinatoire soit plus sûre par la simplicité, il serait bon néanmoins de pouvoir la vérifier par le nombre des formes de $\overset{r..1}{N}$, qui est celui de $\overset{q^r}{N}$, en sommant les coefficiens de permutation. Passons à cette recherche.

§. 11. Nombres r^{naires} à somme n des chiffres.

Il n'y a évidemment qu'une manière de former des 1^{naires} a somme n; c'est le chiffre n lui-même.

2^{naires}. En mettant successivement les chiffres 1, 2, 3, jusques $n-1$ à gauche, la droite recevra les chiffres $n-1$, $n-2$, jusques 1. Total $n-1$ binaires.

3^{naires}. Le chiffre 1 étant à gauche, la somme restante $n-1$ produira à sa droite $n-2$ binaires, et partant ce nombre de ternaires avec lui.

2 à gauche, la somme $n-2$ produit avec lui $n-3$ ternaires,

3 à gauche, la somme $n-3$ produit avec lui $n-4$ ternaires,

et ainsi de suite jusqu'au chiffre

$n-2$ avec lequel la somme 2 forme 1 ternaire;

En sommant de bas en haut, vient

$$1+2+3++n-2=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\text{ ternaires.}$$

4^{naires}. Le chiffre 1 à gauche, la somme $n-1$ produit avec lui $\frac{n-2}{1}\cdot\frac{n-3}{2}$ quat^{s}.

Le chiffre 2 à gauche, la somme $n-2$ produit avec lui $\frac{n-3}{1}\cdot\frac{n-4}{2}$ quat^{s}.

et ainsi de suite jusques

$n-3$ avec lequel la somme 3 forme $\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{1}$ quaternaires.

J'en conclus de bas en haut $\frac{1.2}{1.2}+\frac{2.3}{1.2}$

$$+\frac{3.4}{1.2}++\frac{n-2}{1}\cdot\frac{n-3}{2}=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}$$ quaternaires.

On trouve de même $\frac{1.2.3}{1.2.3}+\frac{2.3.4}{1.2.3}++\frac{n-2}{1}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot$
$\frac{n-4}{3}=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-3}{3}\cdot\frac{n-4}{4}$ quintinaires.

Le procédé demeurant uniforme, on a généralement

*) „ $\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\ldots\frac{n-r+1}{r-1}$ r^{naires} à somme n des chiffres."

J'eûsse pû déduire ce théorème des paragraphes 6 et 9; mais la présente démonstration directe est en même tems une règle infallible pour construire en colonne rangée les nombres r^{naires} à somme n des chiffres.

Constatons à présent l'exactitude des coefficiens proposés dans les paragraphes 4, 5 et 10.

La somme des coefficiens de permutation de

$\overset{q^3}{7}$ est $\frac{6.5}{1.2}=15=3+6+3+3$

$\overset{q^4}{9}$ est $\frac{8.7.6}{1.2.3}=56=4+12+12+12+12+4.$

*) Chez HINDENB. ${}^{n}\mathfrak{M}$ est ce nombre, et ${}^{n}M$ l'ensemble même des files à somme n des numéros. On en verra la raison plus bas.

$\overset{q^6}{13}$ est $\frac{12.11.10.9.8}{1.\ 2.\ 3.\ 4.5} = \begin{cases} 5+30+30+30+60+120+60. \\ +60+60+180+30+60+6. \end{cases}$

Remarque. La quantité des 1^{naires}, 2^{naires}, etc. jusques et compris les n^{naires}, tous à somme n des chiffres, est

$$1 + \frac{n-1}{1} + \frac{n-1}{1}.\frac{n-2}{2} + + \frac{n-1}{1} + 1$$
$$= (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

Comme les problêmes qui vont suivre contiennent assez d'applications des deux théorèmes de ce paragraphe, je n'en donnerai pas ici. En illustrant trop les parties, on court risque d'obscurcir l'ensemble.

§. 12. Nous savons évaluer $(\overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + \overset{q}{3}.X^3 + \text{etc.})^r$ pour chaque valeur de X. Si l'on voulait le dévelop-pement de $(\dot{1} + \dot{2} + \dot{3} + + \dot{k})^r$, *) il suffirait de changer dans celui de $(\overset{q}{1}.X + \text{etc.})^r$ les q en points, et de supprimer les X. Quelque facile que soit ce procédé, Hindenbourg en a donné un autre non moins beau: il exige quelques préliminaires que voici. Je pars encore du cas le plus général.

**) „On peut former n^r nombres r^{naires} avec n chiffres en les répétant."

2^{naires}. Le chiffre 1 peut recevoir successivement 1, 2, jusques n à sa droite: donc n binaires. Mais la même chose a lieu pour 2, 3, enfin pour chaque antre des n chiffres: moyennant quoi le total des binaires possibles est $n.\ n = n^2$.

*) $(a+b+c++u)^r$ chez H.

**) H. note $\overset{\prime}{M}_{[1\,2\,3\,.\,.\,n]}$ l'ensemble des files résultantes.

3^{naires}. Chacun des n chiffres peut recevoir par ordre les n^2 binaires à droite : donc $n.n^2 = n^3$ ternaires possibles.

4^{naires}. Chacun des n chiffres peut recevoir par ordre les n^3 ternaircs à droite : donc $n.n^3 = n^4$ quaternaires possibles.

Et ainsi de suite. Cette demonsration directe enseigne à disposer en colonne rangée les polynaires à répétition.

Exemple. Les Ternaires possibles avec 0136 sont au nombre de $4^3 = 64$.

3 2 1	3 2 1	3 2 1	3 2 1
+ 000	+ 100	+ 300	+ 600
001	101	301	601
003	103	303	603
006	106	306	606
010	110	310	610
011	111	311	611
013	113	313	613
016	116	316	616
030	130	330	630
031	131	331	631
033	133	333	633
036	136	336	636
060	160	360	660
061	161	361	661
063	163	363	663
066	166	366	666

Le développement de

$$(\overset{3}{0}+\overset{3}{1}+\overset{3}{3}+\overset{3}{6})\ (\overset{2}{0}+\overset{2}{1}+\overset{2}{3}+\overset{2}{6})\ (\overset{1}{0}+\overset{1}{1}+\overset{1}{3}+\overset{1}{6})$$

donne cette colonne, qui n'exige que la peine de tracer les chiffres. Un produit de tant de n-nomes qu'on veut se consruit de même.

En formant la colonne **stélégraphiquement**, on peut, pour ainsi dire, opérer les yeux bandés. Soit, par exemple, $X = 1$, on aura

$\overset{r..1}{X n} =$ à un produit de r polynomes de n termes. Pour en construire le développement:

„Ecrivez les termes 1, 2, 3 . . . n de haut en bas n^{r-1} fois de suite. Ecrivez à gauche de ce rang vertical n^{r-2} fois les mêmes termes en repétant chacun n fois; ensuite n^{r-3} fois en repétant chaque terme n^2; continuez dans cette progression."

Si la colonne devient trop longue, rien n'empêche de la rompre en sections.

Théorème sécondaire. *) „En répétant, n chiffres produisent

$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+2}{3} \cdot \cdot \frac{n+r-1}{r}$$

nombres r^{naires} rangés."

Démonstration, servant de règle pour la construction.

2^{naires}. Le chiffre 1 admettant 1, 2, , n à droite, donne n binaires.

Le chiffre 2 admettant 2, 3, , n à droite, donne $n-1$ binaires.

Le chiffre 3 admettant 3, 4, , n à droite, donne $n-2$ binaires.

.

Le chiffre n admettant n - - 1 binaire.

Total $1+2+3++n = \frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2}$ binaires.

3^{naires}. Le chiffre 1 admet à droite les $\frac{n}{1} \cdot \frac{n+1}{2}$ binaires.

2 — — $\frac{n-1}{1} \cdot \frac{n}{2}$ binaires, sans 1.

*) $\overset{'}{M}_{[1,2..n]}$ chez HINDENBOURG.

le chiffre 3 admet à droite les $\frac{n-2}{1}.\frac{n-1}{2}$ binaires, sans 1, 2

.

n — — — $\frac{1}{1}.\frac{2}{2}$ — — 1, 2,, $n-1$

Total $\frac{1}{1}.\frac{2}{2}+\frac{2}{1}.\frac{3}{2}++\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}=$
$\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}.$

4naires. le chiffre 1 admet à droite les $\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}$ ternaires.

2 — — $\frac{n-1}{1}.\frac{n}{2}.\frac{n+1}{3}$ — ternaires, sans 1

.

n — — $\frac{1}{1}.\frac{2}{2}.\frac{3}{3}$ — ternaires, sans 1, 2,, $n-1$

Total $\frac{1}{1}.\frac{2}{2}.\frac{3}{3}++\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+2}{3}$
$=\frac{n}{1}.\frac{n+1}{2}.\frac{n+3}{3}.\frac{n+4}{4}$

Et ainsi de suite ; le procédé est uniforme.

Exemple. Développer $(\dot{0}+\dot{1}+\dot{3}+\dot{6})^4$. Il n'y a qu'à écrire les $\frac{4.5.6.7.}{1.2.3.4.}=35$ quaternaires avec répétition des chiffres 0, 1, 3, 6, et les accompagner du coefficient de permutation.

....					
+ 0000	1	+ 0116	12	+ 1133	6
0001	4	0133	12	1136	12
0003	4	0136	24	1166	6
0006	4	0166	12	1333	4
0011	6	0333	4	1336	12
0013	12	0336	12	1366	12
0016	12	0366	12	1666	4
0033	6	0666	4	3333	1
0036	12	1111	1	3336	4
0066	6	1113	4	3366	6
0111	4	1116	4	3666	4
0113	12			6666	1

La somme des coefficiens numériques étant $256 = 4^4$, ils sont sans faute.

Il n'est pas indigne d'attention que beaucoup des nombres formés des chiffres triangulaires 0 1 3 6 sont remarquables en mathématique, en physique et en histoire, tant politique que réligieuse.

§. 13. Jusques ici nous n'avons exécuté les règles combinatoires qu'arithmographiquement; c'est à dire, à l'aide d'indices numériques ou plûtôt de numéros attribués aux choses combinés. Avec de la réflexion on s'apperçoit pourtant que cet expédient, particulier à la notation que j'ai adopté, n'est nullement indispensable, et qu'on peut combiner et permuter, avec et sans répétition, en files rangées et non rangées, uniquement par l'échange et le déplacement des lettres, comme on fait en construisant les dictionnaires. Par ce procédé lexicographique, l'Analyse Combinatoire s'élève, comme je l'ai dit dans l'introduction, au rang de science indépendante, dont l'analyse mathématique et toutes les autres sciences de raisonnement ne sont que des parties. La méthode lexicographique ou directement combinatoire (rein combinatorisches Verfahren) est entièrement due à Hindenbourg.

Exemples en lettres. *)

Permutation de 4 choses diverses	Permut. à 3 de 4 choses diverses	Combin. à 5 de 7 choses diverses	Permut. de 3 choses avec répétition	Permut. à 2 de 5 choses avec répét.	Combin. à 4 de 3 choses avec répét.
abcd	*efg*	*rstuv*	*ccc*	*aa*	*kkkk*
abdc	*efh*	*rstuw*	*ccd*	*ab*	*kkkl*
acbd	*egf*	*rstux*	*cce*	*ac*	*kkkm*
acdb	*egh*	*rstvw*	*cdc*	*ad*	*kkll*
adbc	*ehf*	*rstvx*	*cdd*	*ae*	*kklm*
adcb	*ehg*	*rstwx*	*cde*	*ba*	*kkmm*
bacd	*feg*	*rsuvw*	*cec*	*bb*	*klll*
badc	*feh*	*rsuvx*	*ced*	*bc*	*kllm*
bcad	*fge*	*rsuwx*	*cee*	*bd*	*klmm*
bcda	*fgh*	*rsvwx*	*dcc*	*be*	*kmmm*
bdac	*fhe*	*rtuvw*	*dcd*	*ca*	*llll*
bdca	*fhg*	*rtuvx*	*dce*	*cb*	*lllm*
cabd	*gef*	*rtuwx*	*ddc*	*cc*	*llmm*
cadb	*geh*	*rtvwx*	*ddd*	*cd*	*lmmm*
cbad	*gfe*	*ruvwx*	*dde*	*ce*	*mmmm*
cbda	*gfh*	*stuvw*	*dec*	*da*	
cdab	*ghe*	*stuvx*	*ded*	*db*	
cdba	*ghf*	*stuwx*	*dee*	*dc*	
dabc	*hef*	*stvwx*	*ecc*	*dd*	
dacb	*heg*	*suvwx*	*ecd*	*de*	
dbac	*hfe*	*tuvwx*	*ece*	*ea*	
dbca	*hfg*		*edc*	*eb*	
dcab	*hge*		*edd*	*ec*	
dcba	*hgf*		*ede*	*ed*	
			eec	*ee*	
			eed		
			eee		

*) Perm. (abcd) ou $\underset{[abcd]}{D'}$, $\underset{[efgh]}{C'}$, $\underset{[rstuvw]}{E'}$, où $\underset{[r..w]}{E'}$, $\underset{[cde]}{'C}$, $\underset{[a..e]}{'B}$, $\underset{[klm]}{'D}$

A quiconque veut faire des progrès rapides en Analyse Combinatoire, je conseillerai de copier d'abord une fois ces exemples, puis de les essayer en d'autres lettres. On en acquiert plus de routine que par cent lectures; car ce n'est qu'en faisant qu'on apprend à faire, et que l'esprit occupé plus fortement, approfondit les idées présentées et en crée de nouvelles.

Pour montrer comment on peut soumettre à ce procédé la combinaison à somme donnée, cherchons le coefficient de x^{13} dans le développement de

$$(ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5+fx^6+gx^7+hx^8+ix^9)^5.$$

C'est

$$\begin{aligned}
& 5\, a^4 i \quad {}^{*)} \\
+\ & 20\, a^3 b h \\
+\ & 20\, a^3 c g \\
+\ & 20\, a^3 d f \\
+\ & 10\, a^3 e^2 \\
+\ & 30\, a^2 b^2 g \\
+\ & 60\, a^2 b c f \\
+\ & 60\, a^2 b d e \\
+\ & 30\, a^2 c^2 e \\
+\ & 30\, a^2 c d^2 \\
+\ & 20\, a b^3 f \\
+\ & 60\, b^2 c e \\
+\ & 30\, a b^2 d^2 \\
+\ & 60\, a b c^2 d \\
+\ & 5\, a c^4 \\
+\ & 5\, b^4 e \\
+\ & 20\, b^3 c d \\
+\ & 10\, b^2 c^3
\end{aligned}$$

La somme des coefficiens numériques étant $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$, le coefficient cherché est sans faute. Je l'ai construit tout réduit; d'abord la partie

*) $(ax + \ldots + ix^9)^5 \, \varkappa \, 13$ ou $\mathfrak{j}^{15}\mathfrak{J}$ chez Hindenb.

litérale, puis les coefficiens numériques. Afin de faire voir comment cela est possible, considérons la colonne 5^naire

11119	*a a a a i* *)
11128	*a a a b h*
11137	*a a a c g*
11146	*a a a d f*
11155	*a a a e e*
11227	*a a b b g*
11236	*a a b c f*
11245	*a a b d e*
11335	*a a c c e*
11344	*a a c d d*
12226	*a b b b f*
12235	*a b b c e*
12244	*a b b d d*
12334	*a b c c d*
13333	*a c c c c*
22225	*b b b b e*
22234	*b b b c d*
22333	*b b c c c*

1) Puisque le terme, dont on demande le coefficient, a x^{13} pour puissance, son premier produit sera $(ax)^4 ix^9$, et partant le 5^naire lexicographique initial est *aaaai*. Pour en dériver les suivans sans autre peine que de les écrire, j'abaisse alphabétiquement *i* et élève l'*a* voisin; vient *aaabh*.

La répétition de ce procédé me donne *aaacg*, *aaadf*, *aaaee*.

2) Ne pouvant aller plus loin, je prens le prémier 5^naire, où *b* est à la seconde place de droite à gauche; c'est *aaabh*. Abaissant *h* et élevant l'*a* le plus proche,

*) $^{13}\mathfrak{J}$; se lisant Involution lexicographique à somme 13. On en verra l'explication plus bas.

j'ai *aabbg*. Opérant sur *bg* comme dans 1), j'obtiens *aabcf*, *aabde*.

Comme *c* suit *b* dans l'alphabet, je prens à présent le premier 5naiie, où *c* a la seconde place et *b* la troisième, *aabcf*. Opérant sur celui-ci, ainsi que nous venons de faire, il en résulte *aacce*, *aacdd*.

3) Les trois dernières places n'étant plus susceptibles d'elévation lexicographique, je préns *aabbg*, premier 5naire où *b* est à la troisième. Abaissant ici *g* et élevant *a*, j'ai *abbbf*; d'où, par les règles 1) et 2), *abbce*, *abbdd*, *abcce*, *abcdd*.

4) Maintenant, du premier 5naire *abbbf*, où *b* a la quatrième place, je déduis par les règles énoncées, *bbbbe*, *bbbcd*, *bbccc*.

A moins d'intervertir l'ordre alphabétique, il n'y a plus de variation possible. La dernière forme du §. 9. me donne à présent sans tracer un chiffre ailleurs, les coefficiens numériques de permutation: leur somme prouve à la fois leur justesse et celle de toute la colonne.

Qu'on écrive les 5naires au long ou simplifiés en puissances, la marche est la même.

Si l'explication de la méthode est prolixe, son apprentisage ne l'est aucunement. On se familiarise en une heure avec elle, en opérant d'abord par chiffres leibnitziens, puis par polynaires non reduits, et enfin dans la simplification potentielle.

Disons à l'honneur du procédé lexicographique de Hindenbourg, qu'aucun autre n'atteint son élégante rapidité. On s'en convaincra le mieux en traitant le problême suivant par les meilleures méthodes connus.

E'crire tout d'un coup le coefficient de x^{25} dans le dévéloppement de $(a+bx+cx^3+dx^6+ex^{10})^{10}$. *)

*) $(a+ \; +ex^{10})^{10}$ x^{25} chez Hindenb.

$$\frac{6.7.8.9.10}{2.2}\ e^2 c b^2 a^5$$

$$\frac{6.7.8.9.10}{2.2.3}\ e^2 b^5 a^3$$

$$\frac{7.8.9.10}{2}\ e d^2 c a^6$$

$$\frac{5.6.7.8.9.10}{2.2.3}\ e d^2 b^3 a^4$$

$$\frac{6.7.8.9.10}{2.3}\ e d c^3 a^5$$

$$\frac{4.5.6.7.8.9.10}{2.2.3}\ e d c^2 b^3 a^3$$

$$\frac{7.8.9.10}{1}\ e d c b^6 a$$

$$\frac{6.7.8.9.10}{2.3.4}\ e c^5 a^4$$

$$\frac{5.6.7.8.9.10}{2.2.3}\ e c^4 b^3 a^2$$

$$\frac{7.8.9.10}{2.3}\ e c^3 b^6$$

$$\frac{6.7.8.9.10}{2.3.4}\ d^4 b a^5$$

$$\frac{5.6.7.8.9.10}{2.2.3}\ d^3 c^2 b a^4$$

$$\frac{5.6.7.8.9.10}{2.2.3}\ d^3 c b^4 a^2$$

$$\frac{8.9.10}{2.3}\ d^3 b^7$$

$$\frac{5.6.7.8.9.10}{2.2.3}\ d^2 c^4 b a^3$$

$$\frac{5.6.7.8.9.10}{2.2.3}\ d^2 c^3 b^4 a$$

$$\frac{7.8.9.10}{2}\ d c^6 b a^2$$

$$\frac{6.7.8.9.10}{2.3.4}\ d c^5 b^4$$

$$\frac{9.10}{1}\ c^8 b a$$

J'ai rangé à rebours, pour montrer que cette manière n'est pas moins facile, Ici elle l'était même davantage, parce que dans la construction litérale, j'ai d'abord pû négliger *a* pour l'ajouter à la fin comme

complément des dix facteurs. Voici comme je m'y suis pris pour les autres lettres.

Ayant trouvé que le plus haut polynaire sans a est $e^2 c b^2$, que e accompagne la même puissance de x que $d c b$, d la même que c^2 et b^6, et c la même que b^3; je remplace c par b^3, vient $e^2 b^5$.

Comme b ne peut se remplacer, je substitue $d^2 c$ à $e b^5$; ce qui me donne $e d^2 c$, où, mettant b^3 pour c, je parviens à $e d^2 b^3$.

Je change ici d en c^2 et b^3 en c pour avoir $e d c^3$, où, mettant deux fois de suite b^3 pour c, j'ai $e d c^2 b^3$ et $e d c b^6$.

Les produits ne peuvent avoir plus de dix facteurs: on ne peut donc plus remplacer c, et en conséquence je change d en c^2 et b^6 en c^2; vient $e c^5$.

Et ainsi de suite. J'en ai assez dit pour qui m'a suivi la plume à la main. On peut facilement généraliser toutes ces règles lexicographiques: je ne m'y arrête pas, parce qu'il est tems de reprendre le Polynome Combinatoire.

$$F(a + x\,\mathrm{f}x) = F a + A\,\frac{x}{1} + B\,\frac{x^2}{1.2} + \text{etc.}$$

$$= F a + A'\,\frac{x\,\mathrm{f}x}{1} + B'\,\frac{x^2\,\mathrm{f}x^2}{1.\ 2.} + \text{etc.}$$

§. 14. Nos coefficiens leibnitziens, tout aussi généraux que les lettres, étant plus souples, et les simplifications différentielles du §. 1. nous dévenant inutiles, après les principes que nous venons d'établir, prenons

${}_{0}\overset{Fq}{X}$, équivalant par §. 2. à $F({}_{0}\overset{q}{X}) =$

$$F(\overset{q}{0}+\overset{q}{X}) = F(\overset{q}{0}+\overset{q}{1}.X+\overset{q}{2}.X^2+\overset{q}{3}.X^3+\text{etc.}).$$

${}_{0}\overset{Fq}{X}$, développé combinatoirement en puissances

de X et $\overset{q}{X}$, donne, en distinguant par des traits les coefficiens des dernières

$$\overset{Fq}{o} + \overset{Fq}{1}\,.\,X + \overset{Fq}{2}\,.\,X^2 ++ \overset{Fq}{{}_{o}N}\,.\,X^N + \text{etc.}\ ^{*)}$$

$$= \overset{Fq}{o'} + \overset{Fq}{1'}\,.\,\overset{q}{X} + \overset{Fq}{2'}\,.\,\overset{q}{X^2} ++ \overset{Fq}{{}_{o}N'}\,.\,\overset{q}{X^N} + \text{etc.}$$

Or par §. 2., $\overset{q}{X} = \overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + \overset{q}{3}.X^3 ++ \overset{q}{N}.X^N + \text{etc.}$

$$\overset{q}{X^2} = \overset{q^2}{X} = \overset{q^2}{2}.X^2 + \overset{q^2}{3}.X^3 ++ \overset{q^2}{N}.X^N + \text{etc.}$$

$$\overset{q}{X^3} = \overset{q^3}{X} = \overset{q^3}{3}.X^3 + \overset{q^3}{4}.X^4 ++ \overset{q^3}{N}.X^N + \text{etc.}$$

et ainsi de suite.

Ces valeurs substituées, la double expression de $\overset{Fq}{{}^{o}X}$ devient

$$\overset{Fq}{o} + \overset{Fq}{1}.X + \left.\begin{array}{l}\overset{Fq}{2}.\\ +\overset{Fq}{2'}.\overset{q}{2}\end{array}\right\} X^2 + \left.\begin{array}{l}\overset{Fq}{3}.\\ +\overset{Fq}{2'}.\overset{q^2}{3}\\ +\overset{Fq}{3'}.\overset{q^3}{3}\end{array}\right\} X^3 ++ \left.\begin{array}{l}\overset{Fq}{{}_{o}N}\\ +\overset{Fq}{2'}.\overset{q^2}{N}\\ +\overset{Fq}{3'}.\overset{q^3}{N}\\ \quad\vdots\\ +\overset{Fq}{{}_{o}N'}.\overset{q^N}{N}\end{array}\right\} X^N + \text{etc.}$$

L'identité des deux séries donne ce théorème remarquable, proprement dit le

POLYNOME COMBINATOIRE

$$^{*)}\ \overset{Fq}{{}_{o}N} = \overset{Fq}{1'}.\overset{q}{N} + \overset{Fq}{2'}.\overset{q^2}{N} + \overset{Fq}{3'}.\overset{q^3}{N} ++ \overset{Fq}{{}_{o}N'}.\overset{q^N}{N};$$

N étant un nombre entier, nous savons par ce qui pré-

*) $\overset{Fq}{{}_{o}N}$ est chez HINDENB. F $(a + bx + cx^2 + \text{etc.})$ $\varkappa$ $(n + 1)$ parceque chez lui F a est censé être le prémier coefficient du développement.

cède, évaluer $\overset{q^N}{N}$ de la manière la plus directe et la plus simple, et par conséquent le problème proposé dans l'introduction est complettement résolu.

Si j'ai été un peu long, c'est que j'ai supposé un lecteur qui n'eût pas même les premières notions de l'Analyse Combinatoire. En les exposant, j'ai mis à portée d'apprécier l'extrême facilité de la méthode et de la comparer avec la différentielle, qui était seule en possession des développemens avant HINDENBOURG. Outre qu'elle conduit plus rapidement et plus sûrement à la solution, elle a encore l'avantage précieux pour le commençant d'être immédiatement applicable à des questions importantes. Ces prérogatives de l'Analyse Combinatoire n'ôtent rien au mérite de la Différentielle, qui a opéré tant de prodiges depuis un siècle: ce n'est même qu'en réunissant intimement, qu'en amalgamant, pour ainsi dire, les deux analyses, qu'on donnera à la logique du mathématicien toute l'étendue et la simplicité, dont elle est susceptible. Mais j'oublie que je dois faire voir l'utilité de notre solution.

§. 15. *Application première.* ${}_{o}\overset{q^r}{X} = (a + \overset{q}{X})^r$, en prenant $\overset{q}{o} = a$. Nous avons ici

$$ {}_{o}\overset{Fq}{N} = \frac{d^N \,.. \, a^r}{1.2..N\, da^N} = \frac{r}{1} . \frac{r-1}{2} . \frac{r-2}{3} .. \frac{r-N+1}{N} a^{r-N} $$

$$ = \underset{r}{N} . a^{r-N} \text{ par la notation du §. 8. Donc} $$

$$ {}^{*)}\; {}_{o}\overset{q^r}{N} = \underset{r}{1} . a^{r-1} . \overset{q}{N} + \underset{r}{2} . a^{r-2} . \overset{q^2}{N} + \underset{r}{3} . a^{r-3} . \overset{q^3}{N} + + \underset{r}{N} . a^{r-N} . \overset{q^N}{N}. $$

*) Chez HINDENBOURG $p^r x(n+1) = {}^r\mathfrak{A}\, a^{r-1} . \mathfrak{a}^n A + {}^r\mathfrak{B}\, a^{r-2} . \mathfrak{b}^n B + + {}^r\mathfrak{N}\, a^{r-n} . \mathfrak{n}^n N.$

Pour $\overset{q-r}{{}_{0}X}$, on a, en changeant le signe de r,

$$*)\ \overset{q-r}{{}_{0}N} = 1.a^{-r-1}.\underset{-r}{\overset{q}{N}} + 2.a^{-r-2}.\underset{-r}{\overset{q^2}{N}} + + N.a^{-r-N}.\underset{-r}{\overset{q^N}{N}}$$

$$= -\underset{r}{1}.a^{-r-1}.\overset{q}{N} + \underset{r+1}{2}.\ a^{-r-2}.\ \overset{q^2}{N} - \underset{r+N-1}{\pm\ N}.\overset{q^N}{N}.$$

Exemple 1^er^. On demande le coefficient de X^8 dans

$$(1 + \overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + \text{etc.})^{-\frac{2}{3}}.$$

En prenant $a = 1, r = -\frac{2}{3}$ et $N = 8$, c'est $\overset{**)\ q-\frac{2}{3}}{{}_{0}8} =$

$$-\tfrac{2}{3}.\overset{q}{8} + \tfrac{5}{9}\left|\begin{array}{c|c} \overset{qq}{17} & 2 \\ 26 & 2 \\ 35 & 2 \\ 44 & 1 \end{array}\right. - \tfrac{40}{81}\left|\begin{array}{c|c} \overset{qqq}{116} & 3 \\ 125 & 6 \\ 134 & 6 \\ 224 & 3 \\ 233 & 3 \end{array}\right. + \tfrac{110}{243}\left|\begin{array}{c|c} \overset{qqqq}{1115} & 4 \\ 1124 & 12 \\ 1133 & 6 \\ 1223 & 12 \\ 2222 & 1 \end{array}\right. - \tfrac{308}{729}\left|\begin{array}{c|c} \overset{qqqqq}{11114} & 5 \\ 11123 & 20 \\ 11222 & 10 \end{array}\right.$$

$$+ \tfrac{2618}{6561}\left|\begin{array}{c|c} \overset{qqqqqq}{111113} & 6 \\ 111122 & 15 \end{array}\right. - \tfrac{7480}{19683}.\overset{q}{1^7}\ .\ \overset{q}{2}.7 + \tfrac{21505}{59049}.\overset{q}{1^8}.$$

Les coefficiens de permutation sont à droite des produits respectifs. En sommant ceux-là on a

$$1+7+21+35+35+21+7+1=2^7,$$

comme l'exige la remarque du §. 11. Ces coefficiens et les produits qu'ils accompagnent sont donc vérifiés. Simplicité, célérité, exactitude — la méthode de HINDENBOURG ne laisse rien à désirer.

La construction indique assez que le coefficient binomien à gauche multiplie toute la colonne: ainsi p.e.

*) $p^{-r}\ x(n+1) = -\ {}^{r}\mathfrak{A}a^{-r-1}.\ \mathfrak{a}^n A + {}^{r+2}\mathfrak{B}a^{-r-2}.\ \mathfrak{b}^n B - \pm^{r+n-1}\ \mathfrak{N}a^{-r-n}.\ \mathfrak{n}^n N.$

**) $p^{-\frac{2}{3}}\ x^9$, chez HINDENB.

$$\tfrac{308}{720}\left|\begin{matrix}11114\\11123\\11222\end{matrix}\right|\begin{matrix}5\\20\\10\end{matrix} = \tfrac{308}{720}(5.\overset{q}{1^4}\overset{q}{4}+20.\overset{q}{2^3}\overset{q}{2}\overset{q}{3}+10.\overset{q}{1^2}\overset{q}{2^3}).$$

Exemple 2[d]. Développer $(\overset{q}{{}_{0}X})^{-1}$. Sans diminuer la généralité de la question nous pouvons supposer $\overset{q}{0} = 1$, $\overset{q}{1}$ et tous les coefficiens suivans négatifs; moyennant quoi

$$(\overset{q}{{}_{0}X})^{-1} = \overset{q-1}{{}_{0}X} = 1 + .\overset{q-1}{{}_{0}1}.X + .\overset{q-1}{{}_{0}2}.X^2 + + .\overset{q-1}{{}_{0}N}.X^N + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{1-\overset{q}{X}} = \frac{1}{1-\overset{q}{1}.X-\overset{q}{2}.X^2 - -\overset{q}{N}.X^N - \text{etc.}}$$

On en tire en développant et comparant

$$\overset{q-1}{{}_{0}N} = \overset{q}{N} + .\overset{q-1}{{}_{0}1}.\overset{q}{N-1}. + .\overset{q-1}{{}_{0}2}.\overset{q}{N-2}. + + .\overset{q-1}{{}_{0}N}.\overset{q}{1},$$

série récurrente moins étendue que celle que nous avons résolue dans le Développement général §. 3.: aussi son expression immédiate est plus simplement par $\overset{Fq}{{}_{0}N'} = 1$,

$$\text{*)}\quad \overset{q-1}{{}_{0}N} = \overset{q}{N} + \overset{q^2}{N} + \overset{q^3}{N} + + \overset{q^N}{N}.$$

Le coefficient de X^9 est de la sorte

$$\text{**)}\quad \overset{q-1}{{}_{0}9} = \overset{q}{9} + \overset{q^2}{9} + \overset{q^3}{9} + + \overset{q^9}{9} =$$

$\overset{q}{9}$ +	18	2 +	$1^2\ 7$	3 +	$1^3 6$	4 +	$1^4 5$	5
	27	2	1 2 6	6	$1^2 2\ 5$	12	$1^3 2\ 4$	20
	36	2	1 3 5	6	$1^2 3\ 4$	12	$1^3 3^2$	10
	45	2	$1\ 4^2$	3	$1\ 2^2 4$	12	$1^2 2^2 3$	30
			$2^2 5$	3	$1\ 2\ 3^2$	12	$1\ 2^4$	5
			2 4	6	$2^3\ 3$	4		
			3^3	1				

*) $p^{-1}\ n\ (n+1)$ pour $p\ (1 + ax + bx^2 + \text{etc})$. Cette explication de p, posée à sa droite, s'appelle chez Hind. Scale ou échelle (Scala).

**) $p^{-1}\ n\ 10$.

$$+\left|\begin{array}{l}1^5 4\\ 1^4 33\\ 1^3 2^3\end{array}\right|\begin{array}{l}6\\ 30\\ 20\end{array}+\left|\begin{array}{l}1^6 3\\ 1^5 2^2\end{array}\right|\begin{array}{l}7\\ 21\end{array}+\overset{q}{1^7}\cdot 8+\overset{q}{1^9}.$$

J'ai englobé ici les facteurs égaux en puissances, et comme les chiffres leibnitziens enfermés en parenthèses sont assez distingués par là des coefficiens numériques de permutation, j'ai pû sousentendre la marque q.

La somme des coefficiens numériques

$$1+8+28+56+70+56+28+8+1=2^8$$

prouve encore la justesse.

Pour exprimer $\overset{q-1}{N}$ tout réduit, il faut avoir recours à l'

*) INVOLUTION LEXICOGRAPHIQUE

HINDENBOURG donne ce nom expressif à l'ensemble des polynaires possibles à somme N, disposés, quand ils sont en lettres, comme les mots d'un dictionnaire. En chiffres leibnitziens, il en résulte de deux manières une suite de nombres ascendans: 1° en sousentendant une virgule décimale après le premier chiffre de la gauche; 2° en rendant la colonne rectangulaire au moyen de zeros fictifs ajoutés à droite.

*) L'involution arithmographique d'une somme n se note chez HINDENB. ${}^{n}\mathrm{J}$, et la lexicographique ${}^{n}\mathfrak{J}$. Quand l'involution a ses coefficiens de permutation, on la designe par $j\,{}^{n}\mathrm{J}$ et $j\,{}^{n}\mathfrak{J}$.

N... 0 8 7 6 5 4 3 2 1				
1,... 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1	$= \overset{q}{1}{}^{N}$		
1,... 1 1 1 1 1 1 1 2	2	$+ 1^{N-2}$	(2	) N − 1
1,... 1 1 1 1 1 1 3	3	$+ 1^{N-3}$	(3	) N − 2
1,... 1 1 1 1 1 2 2		$+ 1^{N-4}$	2^2	$\frac{N-2 \cdot N-3}{2}$
1,... 1 1 1 1 1 4	4		4	N − 3
1,... 1 1 1 1 2 3		$+ 1^{N-5}$	2 . 3	N − 3 . N − 4
1,... 1 1 1 1 5	5		5	N − 4
1,... 1 1 1 2 2 2		$+ 1^{N-6}$	2^3	$\frac{N-3 \cdot N-4 \cdot N-5}{2 \cdot 3}$
1,... 1 1 1 2 4			2 . 4	N − 4 . N − 5
1,... 1 1 1 3 3			3^2	$\frac{N-4 \cdot N-5}{2}$
1,... 1 1 1 6	6		6	N − 5
1,... 1 1 2 2 3		$+ 1^{N-7}$	$2^2 . 3$	$\frac{N-4 \cdot N-5 \cdot N-6}{2}$
1,... 1 1 2 5			2 . 5	N − 5 . N − 6
1,... 1 1 3 4			3 . 4	N − 5 . N − 6
1,... 1 1 7	7		7	N − 6
1,... 1 2 2 2 2		$+ 1^{N-8}$	2^4	$\frac{N-4 \ldots N-7}{2 \cdot 3 \cdot 4}$
1,... 1 2 2 4			$2^2 . 4$	$\frac{N-5 \ldots N-7}{2}$
1,... 1 2 3 3			$2 . 3^2$	$\frac{N-5 \ldots N-7}{2}$
1,... 1 2 6			2 . 6	N − 6 . N − 7
1,... 1 3 5			3 . 5	N − 6 . N − 7
1,... 1 4 4			4^2	$\frac{N-6 \cdot N-7}{2}$
1,... 1 8	8		8	N − 7
1,... 2 2 2 3		$+ 1^{N-9}$	$2^3 . 3$	$\frac{N-5 \ldots N-8}{2 \cdot 3}$
1,... 2 2 5			$2^2 . 5$	$\frac{N-6 \cdot N-7 \cdot N-8}{2}$
1,... 2 3 4			2 . 3 . 4	N − 6 . N − 7 . N − 8
1,... 2 7			2 . 7	N − 7 . N − 8
1,... 3 3 3			3^3	$\frac{N-6 \cdot N-7 \cdot N-8}{2 \cdot 3}$
1,... 3 6			3 . 6	N − 7 . N − 8
1,... 4 5			4 . 5	N − 7 . N − 8
1,... 9	9	.	9	N − 8
.	.	.	.	
.	.	.	.	
.	.	.	.	
N	N	+ N		$= {}_{0}\overset{q-1}{N}$.

Les chiffres en parenthèse sont des coefficiens leibnitziens aussi bien que les ɪ sans marque: les coefficiens numériques occupent la droite.

Cette expression de ${}_{0}\overset{q-1}{N}$ se termine avec $\overset{q}{1}{}^{0}$: A qui a beaucoup d'usage le tableau involutoire n'est pas nécessaire pour la construire. On écrit les co-facteurs de $\overset{q}{1}{}^{N-2}$, $\overset{q}{1}{}^{N-3}$, $\overset{q}{1}{}^{N-4}$, etc., d'après la condition que la somme des chiffres leibnitziens soit respectivement 2, 3, 4, etc.: on joint ensuite les coefficiens de permutation par la règle du §. 9: et on vérifie enfin l'opération par leur somme qui doit être 2^{N-1} selon le §. 11.

De ce que je viens de dire on voudra bien ne pas inférer que je regarde le tableau involutoire comme superflu: il est utile même aux combinateurs les plus exercés, et son étude fournit des vues pour l'*Arithmétique figurée*, qu'on a trop peu traitée jusq'à ce jour. Une propriété précieuse du tableau, la quelle saute d'abord aux yeux, c'est de

„Dériver d'une involution donnée l'immédiatement voisine.

Par exemple, pour dériver l'involution de 10 de l'involution de 9, exprimée sur le tableau, préposez à cette dernière 1 et ajoutez au bas,

2	2	2	2	2
2	2	2	4	
2	2	3	3	
2	2	6		
2	3	5		
2	4	4		
2	8			
3	3	4		
3	7			
4	6			
5	5			
10				

Mais cet appendice est une involution de 10, où le moindre chiffre est 2; involution qu'on peut deduire de l'involution 8 du tableau en préposant 2 et ajoutant

3	3	4
3	7	
4	6	
5	5	
10		

autre involution de 10, où le moindre chiffre est 3. On trouve ainsi que chaque involution se décompose en d'autres jusqu'à exhaustion. Nous en obtenons une recurrence remarquable à laquelle on me permettra de ne pas m'arrêter,

pour traiter tout de suite l'involution litérale sans considération numérique.

INVOLUTION LITERALE DIRECTE

Le coefficient général du développement de $(1 - ax - bx^2 - cx^3 - \text{etc.})^{-n}$ est, en supprimant les coefficiens numériques, faciles à trouver par §. 9,

$$\begin{aligned}
{}^{*)}\quad & a^n + a^{n-2} b + a^{n-3} c \\
& + a^{n-4} (b^2 + d) \\
& + a^{n-5} (bc + e) \\
& + a^{n-6} (b^3 + bd + c^2 + f) \\
& + a^{n-7} (b^2 c + be + cd + g) \\
& + a^{n-8} (b^4 + b^2 d + bc^2 + bf + ce + d^2 + h) \\
& + a^{-9} (b^3 c + b^2 e + bcd + bg + c^3 + cf + de + i) \\
& + a^{-10} (b^5 + b^3 d + b^2 c^2 + b^2 f + bce + bd^2 + bh \\
& \qquad + c^2 d + cg + df + e^2 + k)
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. La série te termine à a^{n-n}.

Abrégeons cette expression par cette forme qui s' explique elle même:

$$a^n + a^{n-2}[2] + a^{n-3}[3] + a^{n-4}[4] + \ldots$$
$$+ a^{n-r+2}[r-2] + a^{n-r+1}[r-1] + a^{n-r}[r] + \text{etc.}$$

On a ici

$[r] = b[r-1] + c[r-2] + d[r-3] + + \overline{r}$; $\overline{r}$ désignant la plus haute lettre de $[r]$, laquelle s' ajoute finalement.

Pour le cas présent, où les produits doivent être rangés, aucune lettre ne multiplie une plus basse. Ainsi

$$[10] = b(b^4 + b^2 d + bc^2 + bf + ce + d^2 + h) + c(cd + g)$$
$$+ d.f + e.e + k.$$

*) ${}^{n\,\prime}\mathfrak{J}^{\prime}_{(a\,b\,c,\ldots)} = a^n + a^{n-2}\ {}^{(2\,\prime}\mathfrak{J}^{\prime}_{(b\,c\,d\ldots\ldots\ldots)} + a^{n-3}\ {}^{(3\,\prime}\mathfrak{J}^{\prime} + a^{n-4}\ {}^{(4\,\prime}\mathfrak{J}^{\prime}$ + etc. chez HIND.

Je répéte encore ici et très expresſément l' avertisſement du Développement général, de ne pas confondre avec une récurrence ordinaire cette construction immédiate d' un terme général au moyen de ses parties.

Aucune méthode n' atteint cette superbe solution de HINDENBOURG, de laquelle on peut dire dans toute la rigueur de l' expression, qu' elle ne demande que la peine et le tems d'écrire. Par elle l' Analyſe Combinatoire a reçu le dernier coup de main; car

chaque coefficient général du développement d' une fonction de ſérie peut ſe conſtruire involutoirement, moyennant des modifications aux coefficiens de permutation.

On en verra des exemples.

En multipliant aussi les lettres alphabétiquement plus basſes, on obtient une INVOLUTION PERMUTÉE

(*Voyez le Tableau Combinatoire ſuivant*, p. 98.)

Cette involution permutée est le coefficient de x^n dans le developpement de

$$a'x + b'x^2 + c'x^3 + d'x^4 + \text{etc.}$$
$$+ (a'x + \text{etc.})\ (a''x + b''x^2 + \text{etc.})$$
$$+ (a'x + \text{etc.})\ (a''x + \text{etc.})(a'''x + b'''x^2 + \text{etc.})$$

+ etc. etc. On y rapporte une foule de cas.

Non ſeulement la ſomme de différentes clasſes de polynaires, mais encore chaque classe en particulier se traite avantageusement par involution. La matière est si riche que je dois me borner: mais quiconque approfondira les exemples que je donne, ne peut manquer de sentir, que le Tableau involutoire est un des algorithmes les plus féconds, et l' instrument analytique le plus ingénieux qu' on connaisse. Nous le devons à

(*La Continuation du Texte*, p. 99.)

n		6	5	4	3	2	1	
1	...	1	1	1	1	1	1	$= a^{(n)} \ldots a^{VI} a^{V} a^{IV} a^{III} a^{II} a^{I}$
1	...	1	1	1	1	2		$+ a^{(n)} \ldots a^{VI} a^{V} a^{IV} a^{III} b^{II}$
1	...	1	1	1	2	1		$+ a^{(n)} \ldots a^{VI} a^{V} a^{IV} \{ b^{III} a^{II}$
1	...	1	1	1	3			c^{III}
1	...	1	1	2	1	1		$+ a^{(n)} \ldots a^{VI} a^{V} \{ b^{IV} a^{III} a^{II}$
1	...	1	1	2	2			$b^{IV} b^{III}$
1	...	1	1	3	1			$c^{IV} a^{III}$
1	...	1	1	4				d^{IV}
1	...	1	2	1	1	1		$+ a^{(n)} \ldots a^{VI} \{ b^{V} a^{IV} a^{III} a^{II}$
1	...	1	2	1	2			$b^{V} a^{IV} b^{III}$
1	...	1	2	2	1			$b^{V} b^{IV} a^{III}$
1	...	1	2	3				$b^{V} c^{IV}$
1	...	1	3	1	1			$c^{V} a^{IV}$
1	...	1	3	2				$c^{V} b^{IV}$
1	...	1	4	1				$d^{V} a^{IV}$
1	...	1	5					e^{V}
1	...	2	1	1	1	1		$+ a^{(n)} \ldots a^{V} \{ b^{VI} a^{V} a^{IV} a^{III} a^{II}$
1	...	2	1	1	2			$b^{VI} a^{V} a^{IV} b^{III}$
1	...	2	1	2	1			$b^{VI} a^{V} b^{IV} a^{III}$
1	...	2	1	3				$b^{VI} a^{V} c^{IV}$
1	...	2	2	2				$b^{VI} b^{V} b^{IV}$
1	...	2	3	1				$b^{VI} c^{V} a^{IV}$
1	...	2	4					$b^{VI} d^{V}$
1	...	3	1	1	1			$c^{VI} a^{V} a^{IV} a^{III}$
1	...	3	1	2				$c^{VI} a^{V} b^{IV}$
1	...	3	2	1				$c^{VI} b^{V} a^{V}$
1	...	3	3					$c^{VI} c^{V}$
1	...	4	1	1				$d^{VI} a^{V} a^{IV}$
1	...	4	2					$d^{VI} b^{V}$
1	...	5	1					$e^{VI} a^{V}$
1	...	6						f^{VI}
.								.
.								.
.								.
n								$+ n^{(n)}$

*) L'involution lexicographiquepermutée d'une somme n s'écrit chez HIND. ${}^{n}\mathfrak{J}$, forme aussi expressive que simple.

Hindenbourg qui l'inventa il y a sept ou huit ans et qui n'a cessé de le perfectionner depuis.

*)

N° 1
1 2 3 4
1 2 4 3
1 3 2 4
1 3 4 2
1 4 2 3
1 4 3 2
2 1 3 4
2 1 4 3
2 3 1 4
2 3 4 1
2 4 1 3
2 4 3 1
3 1 2 4
3 1 4 2
3 2 1 4
3 2 4 1
4 1 2 3
4 1 3 2
4 2 1 3
4 2 3 1
4 3 1 2
4 3 2 1

N° 2
1 1 1
1 1 2
1 1 3
1 2 1
1 2 2
1 2 3
1 3 1
1 3 2
1 3 3
2 1 1
2 1 2
2 1 3
2 2 1
2 2 2
2 2 3
2 3 1
2 3 2
2 3 3
3 1 1
3 1 2
3 1 3
3 2 1
3 2 2
3 2 3
3 3 1
3 3 2
3 3 3

N° 3
1 1 1
1 1 2
1 1 3
1 1 4
1 2 2
1 2 3
1 2 4
1 3 3
1 3 4
1 4 4
2 2 2
2 2 3
2 2 4
2 3 3
2 3 4
2 4 4
3 3 3
3 3 4
3 4 4
4 4 4

N° 4
1
1 2
1 3
1 4
1 5
1 2 3
1 2 4
2 5
1 3 4
3 5
1 4 5
1 2 3 4
1 2 3 5
1 2 4 5
1 3 4 5
2 3 4 5

*) J'ai déja exposé les caractéristiques de Hindenbourg pour ces fonctions combinatoires. Dans mes formes tron-

No. 1 représente de bas en haut les permutations respectives de 1, 2, 3, 4 choses diverses; elle est continuable à volonté.

No. 2. indique les 1^{naires}, 2^{naires}, 3^{naires}, etc. qu' on peut faire avec les choses 1, 2 et 3 en les répétant.

No. 3. est l'involution des 1^{naires}, 2^{naires}, 3^{naires}, etc. rangés possibles avec les choses 1, 2, 3, et 4 répétées.

N. 4 renferme tous les 1^{naires}, 2^{naires}, 3^{naires}, 4^{naires}, 5^{naires}, rangés des choses 1, 2, 3, 4, et 5, non répétées.

J' invite les amateurs à essayer aussi ces exemples immédiatement en lettres: un peu d' attention et beaucoup d' exercice feront trouver les règles dont l' enoncé serait trop long ici. C' est une belle propriété de l' Analyse Combinatoire de s'enseigner elle-même, dès qu' on en a les tableaux sous les yeux.

Il peut paraître surprenant, que ces tableaux, si utiles et d' une construction si simple, ayent échappé aux grands analystes qui ont travaillé sur les combinaisons avant HINDENBOURG. Mais en fait de système didactique, la facilité de l' invention est d'un tout autre genre que celle de l' exécution: vérité qui doit nous remplir d'admiration et de gratitude pour les fondateurs de nos sciences. La simplicité est toujours éminemment difficile à trouver, parcequ' elle est trop près de nous; qu' elle est, s'il m'est permi de parler ainsi, en deça du foyer de notre esprit presbyte, naturellement porté à chercher au

quées d'aujourdhui, je n' en donne pas de particulières; mais dans ma notation à cadre, j' exprime tout avec |‾‾ modifié par des lignes et des points. Les indices s'écrivent dans ce cadre.

loin. *) En ne regardant qu' à la difficulté vaincue, les cinq règles de l' Arithmétique ont ainsi plus de mérite peut être que lá découverte du calcul différentiel, preparée par d' autres découvertes: il en est de même de la Géométrie de Pythagore et de la Méchanique d' Archimède. Aujourdhui qu' une étude de quelques mois conduit beaucoup plus loin, on ne se doute pas de la peine infinie qu' a couté cette facilité. Les mathématiques modernes sont, comme la grotte de Pausylippe, une chausseé plane, depuis que la patience des siècles a percé la montagne. Que n' en peut-on dire autant de toutes les autres sciences, surtout de celles qu' intéressent de plus près le bonheur du genre humain!

§. 16. *Application seconde.* $\overset{Lq}{cX} = L(1 - \overset{q}{X})$, **) en prenant $\overset{q}{o} = 1$ et les autres coefficiens négatifs. Pour L, caractéristique des logarithmes naturels, on a ici

$\overset{Fq}{oN'} = -\frac{1}{N}$ et par la

$$\overset{Lq}{oN} = -\overset{q}{N} - \tfrac{1}{2}.\overset{q^2}{N} - \tfrac{1}{3}.\overset{q^3}{N} - - \frac{1}{N}\overset{q^N}{N}$$

$$= -\frac{1}{N}\left(\frac{N}{1}.\overset{q}{N} + \frac{N}{2}.\overset{q^2}{N} + \frac{N}{3}.\overset{q^3}{N} + + \frac{N}{N}.\overset{q^N}{N}\right.$$

En construisant l'involution, il faut donc diviser le coefficient de permutation des 1^{naires} par 1, celui des 2^{naires} par 2, celui des 3^{naires} par 3; et ainsi de suite. La

*) Ita fit plerumque; quae sunt ante oculos non videmus, facilia negligimus, venamur difficilia. HINDENB. *syst. comb et perm. prim. lin.* p. XVII.

**) log. nat. p pour $p(1 - \varkappa 1.x - \varkappa 2.x^2 - \text{etc.})$

somme de ces coefficiens de permutation modifiés par les multiplicateurs est

$$\frac{1}{N}\left(\frac{N}{1}+\frac{N}{2}\cdot\frac{N-1}{1}+\frac{N}{3}\cdot\frac{N-1}{1}\cdot\frac{N-2}{2}++\right)=\frac{2^N-1}{N}$$

ce qui fournit encore une vérification commode.

Exemple Ecrire sans calcul le coefficient de x^{10} dans le développement de L $(1 - ax - bx^2 - cx^3 -$ etc.). Il est, en posant d'abord les lettres, puis les coefficiens modifiés,

***) $\overset{Lq}{_0 10} = -\frac{1}{10}a^{10} - a^8 b - a^7 c - a^6(3\tfrac{1}{2}b^2 + d) - a^5(6bc + e)$
$- a^4(5b^3 + 5bd + 2\tfrac{1}{2}c^2 + f) - a^3(10b^2c$
$+ 4be + 4cd + g)$
$- a^2(2\tfrac{1}{2}b^4 + 6b^2d + 6bc^2 + 3bf + 3ce$
$+ 1\tfrac{1}{2}d^2 + h)$
$- a(4b^3c + 3b^2e + 6bcd + 2bg + c^3 + 2cf$
$+ 2de + i)$
$- \tfrac{1}{5}b^5 - b^3d - 1\tfrac{1}{2}b^2c^2 - b^2f - 2bce - bd^2$
$- bh - c^2d - cg - df - \tfrac{1}{2}e^2.$

La somme des coefficiens numériques étant $\frac{2^{10}-1}{10} = 103\tfrac{1}{10}$ l'opération est vérifiée.

La construction involutoire de $\overset{Lq}{_0 N}$ offre encore des expédiens particuliers, qu'on peut voir dans l'

Usus Logarithmorum Infinitinomii in theoria aequationum; Lipsiae 1796, opuscule de 46 pages, où l'auteur De Prasse a réuni à un haut dégré la clarté et la précision. Quoique le contenu n'en soit pas élementaire, il explique si bien la notation de HINDENBOURG, qu'il peut être lû sans l'aide

*) (log p) x 10.

d'aucun autre livre. La méthode combinatoire directe, indépendante d' indices numériques, n' était pas encore publiée alors : elle suivit de près cet ouvrage.

*) $\overset{1.-1_q}{X} = 2,7182818 3^{\overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + etc.}$ a pour coefficient général

**) $\overset{1.-1_q}{N} = \overset{q}{N} + \frac{1}{2}.\overset{q^2}{N} + \frac{1}{2.3}.\overset{q^3}{N} + + \frac{1}{2..N}.\overset{q^N}{N}$, expression d'un fréquent usage,

***) $\overset{Sin_q}{{}_0X} = \text{Sin}\,(0,7853981 6 + \overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^2 + etc.)$ a son coefficient général à très peu près de la même forme :

$$\overset{Sin_q}{{}_0N} = \left(\overset{q}{N} + \tfrac{1}{2}.\overset{q^2}{N} - \tfrac{1}{2.3}.\overset{q^3}{N} - + + - \pm \frac{1}{2..N}.\overset{q^N}{N}\right)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

A ces détails explicatifs j' ajouterai trois emplois choisis qui suffiront pour mettre hors de tout doute l' avantage de l' Analyse combinatoire en Algèbre.

§. 17. SÉRIES RÉCURRENTES. Moivre et après lui les plus grands analystes, entr' autres Lagrange et Laplace, ont donné successivement à cette théorie toute l' élégance analytique dont elle est susceptible. Il n' y a que la resolution des équations qui arrête. En simplifiant encore la méthode des substitutions successives, (sinon la plus ingénieuse, au moins la plus expéditive de celles que je connais) j' ai employé plus d' une heure à décomposer l' équation trinome,

*) h^p pour $p = ax + bx^2 + etc.$

**) $(h^p)\,\varkappa n.$

***) sin p pour $p = 0,785398 + ax +$ etc.; sin $p\varkappa n$, etc.

$x^{10} - 123x - 456789 = 0$, en ces dix facteurs

$x - 3{,}681413, \quad x + 3{,}680681,$

$x - 2{,}978143 \pm 2{,}164013\sqrt{-1},$

$x - 1{,}137112 \pm 3{,}501100\sqrt{-1},$

$x + 2{,}977918 \pm 2{,}163319\sqrt{-1},$

$x + 1{,}137802 \pm 3{,}500671\sqrt{-1},$

Le calcul des termes $(a + b\sqrt{-1})^n$ a aussi ses longueurs. Il s' ensuit qu' excepté le cas interpolatoire de n fractionnaire ou très grand, le developpement immèdiat est ordinairement préférable aux formes englobées : aussi EULER et LAGRANGE, s' en sont sérieusement occupés Ce qui peut manquer à leurs travaux, doit être attribué au calcul différentiel, insuffisant pour dèterminer réellement les loix compliquées.

L' an passé (1800) TREMBLEY, HINDENBOURG, et ARBOGAST traitèrent enfin les séries recurrentes combinatoirement. C' est la méthode du second de ces géomètres que je présenterai, après avoir énoncé la question.

f, f et F désignant des fonctions différentes, l' équation identique

$$\frac{\mathrm{f}0 + \mathrm{f}1.X + \mathrm{f}2.X^2 + \text{etc.}}{1 - f1.X - f2.X^2 - - fr.X^r} = \mathrm{F}0 + \mathrm{F}1.X + \mathrm{F}2.X^2 + \text{etc.}$$

devient, en multipliant de part et d' autre par le dénominateur, et comparant les coefficiens respectifs de X^n,

$$\mathrm{F}n = f1.\mathrm{F}(n-1) + f2.\mathrm{F}(n-2) + + fr.\mathrm{F}(n-r) + \mathrm{f}n.$$

Ce terme général d' une série récurrente du r^{ieme} ordre est le cas le plus étendu qu' on ait résolu jusqu' aujourdhui, à l' aide du calcul des r racines de $z^r = f1.z^{r-1} + f2.z^{r-2} + + fr$, d' une sommation aux différences finies et d'une détermination des r constantes qui devient fort longue quand r est un peu grand.

Solution combinatoire. En faisant $\overset{q}{o} = 1$, $\overset{q}{1} = -f1$, etc. j'ai $(1 - f1.X - - fr.X^r)^{-1} = o\overset{q-1}{X} =$

$$1 + \cdot {}_0\overset{q-1}{1}.X + \cdot {}_0\overset{q-1}{2}.X^2 + + \cdot {}_0\overset{q-1}{n}.X^n + \text{etc.,}$$ et partant

$$(fo + f1.X + \text{etc.})\,(1 + \cdot {}_0\overset{q-1}{1}.X + \cdot {}_0\overset{q-1}{2}.X^2 + \text{etc.})$$
$$= fo + F1.X + F2.X^2 + + Fn.X^n + \text{etc.}$$

Le développement fait, l' identité des coefficiens de X^n dans les deux membres procure

$$Fn = fo\ {}_0\overset{q-1}{n} + f1.\ {}_0\overset{q-1}{n} - 1 + f2.\ {}_0\overset{q-1}{n} - 2 + + fn.$$

Or en général ${}_0\overset{q-1}{N}$ est l' involution lexicographique rangée du §. 15. Il suffit donc d' y changer, dans les coefficiens de permutation, N successivement en n, $n - 1$, $n - 2$, jusques 1, en supprimant les produits multipliés par $\overset{q}{r + 1}$, $\overset{q}{r + 2}$, etc. qui sont nuls, puisque $f(r + 1)$, etc. le sont par supposition. On multiplie ensuite respectivement par fo, $f1$, jusques fn .

Cette solution, pour la rapidité de la marche et la simplicité du résultat, me semble ne pouvoir être surpassée.

Exemple, $100 + 33{,}83333x + 11{,}44444x^2 + 3{,}85648x^3 - 18{,}70618x^4 - 13{,}00067x^5 + 6{,}62225x^6 - 2{,}97870x^7 + 2{,}74934x^8 + 3{,}51658x^9 + 2{,}49666x^{10} + 1{,}42795x^{11} - 0{,}07389x^{12} + 0{,}72815x^{13} - 0{,}74225x^{14} - 0{,}53341x^{15} - 0{,}16302x^{16} + 0{,}09129x^{17} + 0{,}12738x^{18}$ + etc.

La recurrence étant donnée par

$$Fn = \tfrac{1}{3} F(n-1) - \tfrac{1}{5} F(n-4) + \frac{1}{1.2.3.n},$$ ce

coefficient général est

$$= 100.\, {}_0\overset{q-1}{n}. + \frac{1}{1}.\, {}_0\overset{q-1}{n-1}. + \frac{1}{1.2}\, {}_0\overset{q-1}{n-2}. + + \frac{1}{1.2..n}$$

$$= 100 \left(\frac{1}{3^n} - \frac{n-3}{3^{n-4}.5} + \frac{(n-6)(n-7)}{3^{n-8}.5^2} - \text{etc.} \right)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \left(\frac{1}{3^{n-1}} - \frac{n-4}{3^{n-5}.5} + \frac{(n-7)(n-8)}{3^{n-9}.5^2} - \text{etc.} \right)$$

$$+ \frac{1}{2.3} \left(\frac{1}{3^{n-2}} - \frac{n-5}{3^{n-6}.5} + \frac{(n-8)(n-9)}{3^{n-10}.5^2} - \text{etc.} \right)$$

$$+ \frac{1}{2.3\,4} \left(\frac{1}{3^{n-3}} - \frac{n-6}{3^{n-7}.5} + \frac{(n-9)(n-10)}{3^{n-11}.5^2} - \text{etc.} \right)$$

+ etc., etc. Les termes qui contiennent des exposans négatifs se négligent. Ainsi $n = 0$ donne 100; $n = 1$ donne 33,83333; $n = 2$ donne 11,44444, comme cela doit être. Si l' expression de Fn est longue, celle de la série recurrente sommée à l' infini est fort courte.

$$\frac{100 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x^4} = \frac{99x - 1 + 2{,}7182818^x}{x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4}$$

Des groupes plus compliqués, par exemple,

$$\frac{(a + b\ x + c\ x^2 + \text{etc.})^m\, (a' + b'\ x + \text{etc.})^n}{(a'' + b''x + c''x^2 + \text{etc.})^r\, (a''' + b'''x + \text{etc.})^s},$$

se développent avec la même facilité.

§. 18. REVERSION FONCTIONNAIRE-COMBINATOIRE. Etant donné l' équation quelconque $fz = 0$, exprimer Fz en fonction connue d'une arbitraire x.

Ayant écrit $fz = fx - fx$, je prens de part et d' autre la fonction Ff^{-1}, et j' obtiens, en me souvenant

que d' après le Développement général, $Ff^{-1}f$ équivaut à F,

$$Fz = Ff^{-1}(fx - fx) =$$

$$Fx - \frac{dFx}{1.dfx}.fx + \frac{d^2Fx}{1.2\,dfx^2}.fx^2 - \frac{d^3Fx}{1.2.3\,dfx^3}.fx^3$$

+ etc. aprés avoir développé par le théoréme de Taylor; x est absolument ce qu'on veut.

Exemple. De $z - \cos z = 0$, tirer immédiatement $h^{-z} = 2{,}7182818^{-z}$ en fonction d' une approximation première ad - libitum.

En faisant pour abréger $\sin x = s$, $\cos x = c$, la formule donne

$$h^{-z} = h^{-x}(1 + (1+s)^{-1}(x-c) + \tfrac{1}{2}[(1+s)^{-2} + c(1+s)^{-3}]$$
$$(x-c)^2 + \tfrac{1}{6}[(1+s)^{-3} + (3c+s)(1+s)^{-4} + 3c^2$$
$$(1+s)^{-5}](x-c)^3 + \text{etc.}$$

On voit ici que malgré la simplicité de l' exemple proposé, la formule differentielle laisse bientôt perdre la loi. Voyons ce que peut l' Analyse Combinatoire, aidée de la differentielle.

Nous avons d' abord (Dév. gén. §. 6.) cette conversion

$$\frac{d^N Fx}{1.2..N\,dfx^N} = \frac{d^{N-1}\left[\frac{dFx}{dx}.\left(\frac{fx-fa}{x-a}\right)^{-N}\right]}{1.2.3.4..N\,dx^{N-1}},$$

la constante a devenant x après les differentiations.

En supposant $\frac{fx - fa}{x-a} = o\overset{q}{X}$, on a ensuite par le theorème $d^n(pq) = p\,d^n q +$ etc.

$$\frac{d^{N} F x}{1.2..N\,dx^{N}} = \frac{d^{N-1}\left[\frac{dFx}{dx}.\,\overset{q}{o}X^{-N}\right]}{1.2.3....N\,dx^{N-1}} =$$

$$\frac{d^{N} Fx}{dx^{N}}.\,\overset{q}{o}X^{-N}. + \frac{N-1}{1}.\,\frac{d^{N-1}Fx}{dx^{N-1}}.\,\frac{d(\overset{q}{o}X^{-N})}{dx}$$

$$+ \frac{N-1}{1}.\,\frac{N-2}{2}.\,\frac{d^{N-2}Fx}{dx^{N-2}}.\,\frac{d^{2}(\overset{q}{o}X^{-N})}{dx^{2}}$$

$$+ \ldots + \frac{N-1}{1}.\,\frac{d^{2}Fx}{dx^{2}}.\,\frac{d^{N-2}(\overset{q}{o}X^{-N})}{dx^{N-2}}. + \frac{dFx}{dx}.$$

$\frac{d^{N-1}(\overset{q}{o}X^{-N})}{dx^{N-1}}$, le tout divisé par 1.2.3.... N. Voilà déja la difficulté rappellée à la différentiation des fonctions simples $\frac{dFx}{dx}$ et $\left(\frac{fx - fa}{x-a}\right)^{-N}$. Mais comme la puissance négative et la condition de changer finalement a en x, mettent encore la loi en danger et obligent au moins à des circuits, développons $\overset{q}{o}X$ combinatoirement.

$$\overset{q}{o}X = \overset{q}{o} + \overset{q}{1}.X + \overset{q}{2}.X^{2} ++.\,\overset{q}{o}M.\,X^{M} + \text{etc.} =$$

$$\frac{fx - fa}{x-a} = \frac{dfa}{da} + \frac{d^{2}fa}{2da^{2}}.\,(x-a) + \frac{d^{3}fa}{2.3.da^{3}}(x-a)^{2}$$

$+$ etc.,

X étant ici $= x - a$ et $\overset{q}{o}M = \frac{d^{M+1}fa}{2.3..(M+1)\,da^{M+1}}$

Or par §. 2. nous avons

$\overset{q}{o}X^{-N} = \overset{q}{o}X^{-N} = \overset{q}{o}^{-N} + .\,\overset{q}{1}^{-N}.X ++ .\,oR.\,X^{R}$ + etc. et partant,

$$\frac{d^R(o\overset{q}{X}-N)}{dx^R} = 1.\,2.\,3\,.\,.\,R\,.\,o\overset{q}{R}^{-N},$$ en mettant après la différentiation x pour a, ce qui annulle X.

Comme $\overset{q}{o} = \frac{d\mathrm{f}a}{da} = \frac{d\mathrm{f}x}{dx}$, nous aurons donc par le

§. 15, $o\overset{q}{R}^{-N} = \frac{N}{1}\left(\frac{d\mathrm{f}x}{dx}\right)^{-N-1} . \overset{q}{R} - \frac{N}{1} . \frac{N+1}{2}$
$\left(\frac{d\mathrm{f}x}{dx}\right)^{-N-2} . \overset{q2}{R} + \frac{N}{1} . \frac{N+1}{2} . \frac{N+2}{3} . \left(\frac{d\mathrm{f}x}{dx}\right)^{-N-3} .$
$\overset{q^3}{R} - \pm \frac{N}{1} . . . \frac{N+R-1}{R}\left(\frac{d\mathrm{f}x}{dx}\right)^{-NR} . \overset{qR}{R}.$

$o\overset{q}{O}^{-N}$ fait exception à cette formule; mais on sait par $(\overset{q}{o} + \overset{q}{X})^{-N}$ que sa valeur est $\overset{q}{o}^{-N} = \left(\frac{d\mathrm{f}x}{dx}\right)^{-N}$.

En faisant R succesivement 1, 2, jusques N — 1, et substituant les resultats

$$\frac{d(o\overset{q}{X}-N)}{dx} = 1.\ o\overset{q}{1}^{-N} = N\left(\frac{d\mathrm{f}x}{dx}\right)^{-N-1} \overset{q}{.1}$$

$$\frac{d^2(o\overset{q}{X}-N)}{dx^2} = 1.\ 2.\ o\overset{q}{2}^{-N} =$$

$$1.2\left[\frac{N}{1}\left(\frac{d\mathrm{f}x}{dx}\right)^{-N-1} \overset{q}{.2} - \frac{N}{1} . \frac{N+1}{2}\left(\frac{d\mathrm{f}x}{dx}\right)^{-N-2} \overset{q^2}{.2}\right]$$

et ainsi de suite, dans la série de $\frac{d^N\,\mathrm{F}x}{1\,.\,N\,d\mathrm{f}x^N}$, elle devient après la suppression des facteurs qui se compensent,

$$\frac{d^N Fx}{1.2..N\,dfx^N} = \frac{d^N Fx}{1..N\,dx^n}\cdot\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N}$$

$$+\frac{d^{N-1}Fx}{1..N-2.dx^{N-1}}\cdot\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N-1}{}^{q}_{.1}$$

$$+\frac{d^{N-2}Fx}{1..N-3.dx^{N-1}}\cdot$$

$$\left[\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N-1}{}^{q}_{.2}+\frac{N+1}{}\cdot\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N-2}{}^{q^2}_{.2}\right]$$

$$+\frac{d^{N-3}Fx}{1..N-4.dx^{N-2}}\cdot$$

$$\left[\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N-1}{}^{q}_{.3}-\frac{N+1}{2}\cdot\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N-2}{}^{q^2}_{.3}+\frac{N+1}{2.}\cdot\frac{N+2}{3.}\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N-3}{}^{q^3}_{.3}\right]$$

+ etc, etc. On continuera cette série jusques inclusivement le premier terme dont le dénominateur devient un zéro qui se supprime. La raison de cetté suppression, qui peut surprendre, est dans la suite

$k^0+\frac{k^1}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+$ etc. où le terme initial n'à proprement dit point de diviseur.

Le coefficient général trouvé ne donne les valeurs que depuis $N=2$; mais pour $N=0$ etc. 1, on a les termes correspondans $Fx-\frac{dFx}{dfx}\cdot fx$ tout réduits.

On peut aussi ordonner la série de la manière suivante

$$\frac{d^N Fx}{1..N\,dfx^N}=\frac{d^N Fx}{1..N\,dx^N}\cdot\left(\frac{dfx}{dx}\right)^{-N}$$

$$+\left(\frac{d\mathrm{f}x}{dx}\right)^{-N-1}$$

$$\left[\frac{d^{N-1}\mathrm{F}x}{1..N-2.\,dx^{N-1}}.\overset{q}{1}+\frac{d^{N-2}.\,\mathrm{F}x}{1..N-3.\,dx^{N-2}}\cdot 2+\text{etc.}\right]$$

$$-\frac{N+1}{2}\left(\frac{d\mathrm{f}x}{dx}\right)^{-N-2}$$

$$\left[\frac{d^{N-2}\mathrm{F}x}{1..N-3.\,dx^{N-2}}.\overset{q^2}{2}+\frac{d^{N-3}\mathrm{F}x}{1..N-4.\,dx^{N-3}}\overset{q^2}{3}+\text{etc.}\right]$$

$$+\frac{N+1.N+2}{2.\;3}\left(\frac{d\mathrm{f}x}{dx}\right)^{-N-3}$$

$$\left[\frac{d^{N-3}\mathrm{F}x}{1..N-4\,dx^{N-3}}.\overset{q^3}{3}+\frac{d^{N-4}\mathrm{F}x}{1..N-5\,dx^{N-4}}.\overset{q^3}{4}+\text{etc.}\right]$$

$$-\frac{N+1}{2}.\frac{N+2}{3}.\frac{N+3}{4}.$$

$$\left[\frac{d^{N-4}\mathrm{F}x}{1..N-5.\,dx^{N-4}}.\overset{q}{4}+\text{etc.}\right]+\text{etc.}$$

On ne perdra pas de vue que dans les colonnes combinatoires $\overset{q}{1}, \overset{q}{2}, \overset{q}{3}$, etc.; $\overset{q^2}{2}, \overset{q^3}{2}$, etc.; $\overset{q^3}{3}$, etc., etc, $\overset{q}{M}$ est $=\dfrac{d^{M+1}\mathrm{f}x}{1..M+1.\,dx^{M+1}}$

Cette solution est aussi courte que sa grande généralité le comporte et nous possédons sa loi de deux manières. Je n' ai donné tant d' étendue au problème que pour montrer ce que peut l' Analyse Combinatoire en fait de développemens compliqués. ESCHENBACH, ROTHE et HINDENBOURG ont donné des Reversions sans arbitraire x, incomparablement plus traitables. Celle du dernier mérite par son élegance toute l' attention des géomètres.

Je ne disconviens pas d' ailleurs que les substitutions successives ne soient plus expéditives que les sé-

ries pour l' évaluation des racines numériques. EULER l' a déja remarqué. L' exemple proposé: De z — cos z = o, conclure h^{-z}, ne demande qu' un quart d' heure par la methode des substitutions successives. Dans la 3me partie de mon Esssai de Caractéristique Combinatoire je donne à cette methode des règles qui laissent, j' espère, peu à désirer pour l' usage.

§. 19. DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN FACTEURS BINOMES. Je me propose à dessein des cas très difficiles.

Problème 1r Changer F*x* en un produit de la forme

$$(1+X)^{\overline{1}}\,(1+X^2)^{\overline{2}}\cdot(1+X^3)^{\overline{3}} \text{ etc. etc.};\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \text{etc.}$$

étant à déterminer. Je suppose pour simplifier que X nul, change F*x* en 1. Comme le calcul immediat compliquerait, passons d' abord aux logarithmes naturels pour avoir, en représentant F*x* par $o\dot{X} = \dot{1} + \dot{1}.\,X + \dot{2}.\,X^2 + \text{etc.}$

$$L(o\dot{X}) \text{ ou } o\overset{L.}{X} = \overline{1}.\ L(1+X) + \overline{2}.\ L(1+X^2) + \overline{3}.\ L(1+X^3) + \text{etc.}$$

En développant ici le membre gauche combinatoirement et le droit analytiquement on obtient

$$\overset{L.}{\dot{1}}.X + \cdot\,\overset{L.}{{}_o2}.\,X^2 + \cdot\,\overset{L.}{{}_o3}.\,X^3 + \text{etc.} =$$

$$\overline{1}.\,X \left.\begin{matrix} -\tfrac{1}{2}\cdot\overline{1} \\ +\ \ \overline{2}\end{matrix}\right]X^2 \left.\begin{matrix} +\tfrac{1}{3}\cdot\overline{1} \\ -\ \ \overline{3}\end{matrix}\right]X^3 \left.\begin{matrix} -\tfrac{1}{4}\cdot\overline{1} \\ -\tfrac{1}{2}\cdot\overline{2} \\ +\ \ \overline{4}\end{matrix}\right]X^4 \left.\begin{matrix} +\tfrac{1}{5}\cdot\overline{1} \\ +\ \ \overline{5}\end{matrix}\right]X^5 + \text{etc.}$$

équation identique, dont je tire

$$1 = {}_0\overset{\text{L.}}{1} = \dot{1},\ \overline{2} = {}_0\overset{\text{L.}}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\overline{1} = {}_0\overset{\text{L.}}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\dot{1},$$

$$\overline{3} = {}_0\overset{\text{L.}}{3} - \tfrac{1}{3}\cdot\dot{1},\ \overline{4} = {}_0\overset{\text{L.}}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot\overline{2} + \tfrac{1}{4}\cdot\dot{1} = {}_0\overset{\text{L.}}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot{}_0\overset{\text{L.}}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\dot{1},$$

$$\overline{5} = {}_0\overset{\text{L.}}{5} - \tfrac{1}{5}\cdot\dot{1},\ \overline{6} = {}_0\overset{\text{L.}}{6} + \tfrac{1}{2}\cdot\overline{3} - \tfrac{1}{3}\cdot\overline{2} + \tfrac{1}{6}\cdot\dot{1},\ \overline{7} = {}_0\overset{\text{L.}}{7} - \tfrac{1}{7}\cdot\dot{1},$$

et ainsi de suite.

Le Développement général donne la manière combinatoire directe de parvenir à l' exposant général $\overline{N}$; mais voici un autre procédé, qui dans le cas présent conduit plus vite au but.

Pour construire $\overline{N} = {}_0\overset{\text{L.}}{N} \ldots\ldots \pm \frac{1}{N}\cdot\dot{1}$, je remarque que chacun des termes intermédiaires est ici $\pm \frac{1}{R}\cdot\overline{S}$ pour $RS = N$; R et S étant des entiers > 1 et $< N$, le signe + ayant lieu pour R pair, et — pour R impair. Cette considération fournit des valeurs très simples pour N nombre premier, qui n'a point de diviseurs, hors l'unité et lui-même. En ce cas

$$1)\qquad \overline{N} = {}_0\overset{\text{L.}}{N} - \frac{1}{N}\cdot\dot{1}.$$

Soit $N = RS$, produit de deux facteurs premiers: donc

$$\overline{N} = {}_0\overset{\text{L.}}{N} - \frac{1}{R}\cdot\overline{S} - \frac{1}{S}\cdot\overline{R} - \frac{1}{N}\cdot\dot{1},$$

ou bien, en mettant les équivalens de S et R connus par 1)

$$2)\ \overline{N} = {}_0\overset{\text{L.}}{N} - \frac{1}{R}\cdot{}_0\overset{\text{L.}}{S} - \frac{1}{S}\cdot{}_0\overset{\text{L.}}{R} + \frac{1}{N}\cdot\dot{1}.$$

N, produit de 3 facteurs premiers R, S, T, donne à l' aide de 1) et 2) cette formule

$$3)\ \overline{N} = \overset{L.}{{}_0N} - \frac{1}{R}.\ \overset{L.}{{}_0ST} - \frac{1}{S}.\ \overset{L.}{{}_0RT} - \frac{1}{T}.\ \overset{L.}{{}_0RS}$$

$$+ \frac{1}{RS}.\ \overset{L.}{{}_0T} + \frac{1}{RT}.\ \overset{L.}{{}_0S} + \frac{1}{ST}.\ \overset{L.}{{}_0T} - \frac{1}{N}.\ \dot{1},$$

Les formules pour N, produit de 4, 5, enfin de tant de facteurs premiers qu' on veut, se construisent sans autre peine que d' écrire. et voici comment.

„Décomposez le produit RSTU ... = N en 1^{naires}, 2^{naires}, 3^{naires}, etc. rangés, qui formeront les dénominateurs des fractions $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{S}$, $\frac{1}{T}$, etc.; $\frac{1}{RS}$, $\frac{1}{RT}$, etc.; $\frac{1}{RST}$, etc.; etc. Chacune de ces fractions s' accompagnera d'un coefficient de LFx, dont le numéro sera N multiplié par la fraction. Les 1^{naires}, 3^{naires}, 5^{naires}, etc. ont le signe —; les 2^{naires}, 4^{naires}, etc. ont le signe +.

Cette déterminatiou d' un terme général combinatoire à l' aide des facteurs prémiers de son numéro, est très singulière et peut enrichir la Science des Nombres, partie, que Legendre a le premier réduit en corps de doctrine, avec un succès qui lui assûre la reconnaissance universelle.

Problème 2^d. Convertir ${}_0\dot{X}$, fonction quelconque de X, en

$$(1 + \overline{1}.X)\ (1 + \overline{2}.X^2)\ (1 + \overline{3}.X^3)\ \text{etc.}$$

je suppose encore ${}_0\dot{X} = 1 + \dot{1}.X + \dot{2}.X^2 +$ etc., forme toujours possible, en multipliant ou divisant la fonc-

tion par une constante et développant par le théorême de TAYLOR. Le calcul immédiat donne

$$ {}_{0}\dot{X} = 1 + \dot{1}.X + \dot{2}.X^2 + \text{etc.} = $$

$$ 1 + \bar{1}.X + \bar{2}.X^2 + \left.\begin{matrix} \bar{3} \\ +\bar{1}\,\bar{2} \end{matrix}\right\} X^3 + \left.\begin{matrix} \bar{4} \\ +\bar{1}\,\bar{3} \end{matrix}\right\} X^4 + \left.\begin{matrix} \bar{5} \\ +\bar{1}\,\bar{4} \\ +\bar{2}\,\bar{3} \end{matrix}\right\} X^5 + \text{etc.} $$

${}_{0}\dot{N}$ est ici une involution à somme N, sans répétition ni permutation, soit effective, soit par coefficiens. Par la comparaison des termes homologues, on trouve

$$ \bar{1} = \dot{1}, \quad \bar{2} = \dot{2}, \quad \bar{3} = \dot{3} - \bar{1}\,\bar{2}, \quad \bar{4} = \dot{4} - \bar{1}\,\bar{3}, $$

$$ \bar{5} = \dot{5} - \bar{1}\,\bar{4} - \bar{2}\,\bar{3}, \quad \bar{6} = \dot{6} - \bar{1}\,\bar{5} - \bar{2}\,\bar{4} - \bar{1}\,\bar{2}\,\bar{3}. $$

$$ \bar{7} = \dot{7} - \bar{1}\,\bar{6} - \bar{2}\,\bar{5} - \bar{3}\,\bar{4} - \bar{1}\,\bar{2}\,\bar{4}; $$

$$ \bar{8} = \dot{8} - \bar{1}\,\bar{7} - \bar{2}\,\bar{6} - \bar{3}\,\bar{5} - \bar{1}\,\bar{2}\,\bar{5} - \bar{1}\,\bar{3}\,\bar{4}. \text{ etc.} $$

La substitution successive, tâtonnement inventif, qui fait si souvent, à l' aide des chiffres Leibnitziens, démêler les loix compliquées, nous donne

$$ \bar{1} = \dot{1}, \quad \bar{2} = \dot{2}, \quad \bar{3} = \dot{3} - \dot{1}\dot{2}, \quad \bar{4} = \dot{1}\dot{3} - \dot{1}\dot{1}\dot{2}, $$

$$ \bar{5} = \dot{5} - \dot{1}\dot{4} + \dot{1}\dot{1}\dot{3} - \dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{2}. $$

$$ - \dot{2}\dot{3} + \dot{1}\dot{2}\dot{2} $$

$$ \bar{6} = \dot{6} - \dot{1}\dot{5} + \dot{1}\dot{1}\dot{4} - \dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{3} + \dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{2}; $$

$$ - \dot{2}\dot{4} + \dot{1}\dot{2}\dot{3} - \dot{1}\dot{1}\dot{2}\dot{2}. $$

Jusques ici ces valeurs sont des décompositions rangées de N avec repetition et exclusion des termes composés d' un produit du même chiffre, tel par exemple que $\dot{2}\dot{2}$, $\dot{4}\dot{4}\dot{4}$, etc. Mais cette loi, manifeste en apparence, change à

$$\bar{7} = \dot{7} - \dot{1}\dot{6} + \dot{1}\dot{1}\dot{5} - \dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{4} + \dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{3} - \dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{2};$$
$$- \dot{2}\dot{5} + 2.\dot{1}\dot{2}\dot{4} - 3.\dot{1}\dot{1}\dot{2}\dot{3} + 2.\dot{1}\dot{1}\dot{1}\dot{2}\dot{2}$$
$$- \dot{3}\dot{4} + \dot{1}\dot{3}\dot{3} - \dot{1}\dot{2}\dot{2}\dot{2}$$
$$+ \dot{2}\dot{2}\dot{3}$$

ce qui doit mettre en gardes contre les inductions précipitées. Recourons aux logarithmes, qui changeront

$${}_0\dot{X} = (1 + \bar{1}.X)\,(1 + \bar{2}.X^2)\,(1 + \bar{3}.X^3) \text{ etc. en}$$
$$\overset{L.}{{}_0 1}.X + .\overset{L.}{{}_0 2}.X^2 + .\overset{L.}{{}_0 3}.X^3 + \text{etc.} =$$
$$L(1 + \bar{1}.X) + L(1 + \bar{2}.X^2) + \text{etc.} =$$
$$\bar{1}.X \left.\begin{matrix} - \frac{1}{2}.\bar{1}^2 \\ + \bar{2} \end{matrix}\right\rbrace X^2 \left.\begin{matrix} + \frac{1}{3}.\bar{1}^3 \\ + \bar{3} \end{matrix}\right\rbrace X^3 \left.\begin{matrix} - \frac{1}{4}.\bar{1}^4 \\ - \frac{1}{2}.\bar{2}^2 \\ + \bar{4} \end{matrix}\right] X^4 + \text{etc.}$$

Par la comparaison des termes homologues, on trouve en transposant

$\bar{N} = \overset{L.}{{}_0 N}, \ldots, \pm \frac{1}{N}.\dot{1}^N$. Ici les termes intermédiaires se déterminent au moyen de la forme

$\frac{1}{R}(-\bar{S})^R$ pour $N = RS$ aux mêmes conditions

que dans le problème précédent. Si N est un nombre premier, on a ici

$$\overset{L.}{\overline{N}} = {}_0N - \overset{I}{\overline{N}} \cdot \dot{1}^N .$$

Au moyen de cette formule, on en construira pour N produit de 2, 3, enfin de tant de facteurs premiers qu'on veut.

Ma transformation d' une fonction générale en un produit de binomes à puissances successives de la variable, est, je pense, entièrement neuve, et ne manquera pas de trouver son emploi. Non seulement l' Analyse différentielle est insuffisante ici, mais encore chaque autre hors la combinatoire. On se rapellera que j' ai mis dans tout son jour, que l' Analyse Combinatoire est le Calcul ordinal ou des rapports de situation.

APPENDICE SUR LES RAPPORTS DE SITUATION.

En mettant un ordre dans une suite d'idées, il en résulte nécessairement des ordres accessoires dont la contemplation fournit sans cesse des théorèmes nouveaux. Pour me borner aux objets les mieux connus: de la suite des unités naissent les nombres naturels et les figurés de toute espèce; les nomenclatures et classifications méthodiques, la construction des langues vulgaires et philosophiques dérivent de certains mots-racines qu' on combine et modifie plus ou moins systématiquement. L' art de retenir et de raisonner, celui même d' inventer, n' ont point d' autre base: l' homme de génie ne se distingue que par l' imagination aidée du goût, c' est à dire, par la faculté de former plus de combinaisons et d' en choisir les meil-

leures; delà les différences du génie. Pythagore et Homère avaient plus d' imagination qu' Archimède et Virgile; ceux-ci l' avaient plus sage. Il est difficile de prononcer sur la préeminence, mais encore plus d' enseigner l' imagination et le goût, et surtout de déterminer comment l' homme extraordinaire les acquiert. Tel croit le génie un pur don de la nature, tel un résultat d' un travail opiniâtre; ce qui est certain, c' est que si l' assiduité n' est pas toujours la mère du génie, elle en est aumoins constamment la nourrice. Au reste il n' y a guère que les gens sans génie qui raisonnent bien sur le génie; celui-ci prèfere d' étonner le monde au soin minutieux de se scruter lui-même.

Personne ne doute d' ailleurs que de bonnes règles, faciles à retenir et à combiner, ne conduisent plus sûrement à la science, qu' une récherche à l' aventure, où l' esprit épuise ses forces en vain. La briéveté de l' enoncé, en soulageant la mémoire, aide extrêmement le jugement; c' est l' avantage de l' algèbre et des tableaux combinatoires. A la rigueur on peut s' en passer; le discours vulgaire peut exprimer l' algèbre la plus savante: mais avec quelle diffusion!

Ces tableaux déduisent de la situation des signes arbitraires, des rapports constans entre les idées qui répondent à ces signes: voilà ce que j' entens par RAPPORT DE SITUATION.

Nous n' avons considéré jusques ici que la situation linéaire et plane: cette dernière est celle qui résulte de l'ordonnance horisontale et verticale des signes; l'oblique, plus ou moins inclinée, n' en est qu' une conséquence. L' ordonnance solide, ou selon trois dimension, n' a encore été que peu considérée, elle promet cependant des résultats encore plus inté-

ressans par leur généralité, et je compte m' en occuper un jour.

Le modèle combinatoire le plus ancien, et sans contredit le plus parfait, de l' ordonnance plane est l' Involution Lexico-stélégraphique, connue sous le nom de Table de Pythagore.

01	02	03	04	05	06	07	08	09	
02,	04	06	08	10	12	14	16	18	etc.
03,	06,	09	12	15	18	21	24	27	
04,	08,	12,	16	20	24	28	32	36	etc.
05,	10,	15,	20,	25	30	35	40	45	etc.
06,	12,	18,	24,	30,	36	42	48	54	
07,	14,	21,	28,	35,	42,	49	56	63	
08,	16,	24,	32,	40,	48,	56,	64	72	
09,	18,	27,	36,	45,	54,	63,	72,	81	etc.
etc.				etc.			etc,		

Les suites horisontales et verticales ont les premières différences constantes, les secondes différences sont constantes dans les suites obliques interminées; il en est de même dans les obliques terminées, à cela près qu' elles s'étendent symmetriquement des deux cotés.

De ce tableau continuable à l' infini, on tire par évolution

01 ; 01, 02 ; 01, 02, 03 ; 01, 02, 03, 04 ; etc,
02, 04 02, 04, 06 02, 04, 06, 08
03, 06, 09 03, 06, 09, 12
04, 08, 12, 16

Ces évolutions, ou parties géneratrices de l' involution, sont des tables de multiplication pour les échelles de numération de 1, 2, 3, 4, etc. chiffres significatifs,

Le tableau des nombres figurés est du même genre:

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28
1	4	10	20	35	56	84
1	5	15	35	70	126	210
1	6	21	56	126	252	462
1	7	28	84	210	462	924

Les diagonales terminées sont le développement du binome $(1+1)^n$, tandis que les obliques interminées présentent des suites d' une sommation moins facile, la forme du terme général étant exponentielle. Par exemple

$$1+\frac{2}{1}+\frac{3.4}{1.2}+\frac{4.5.6}{1.2.3}+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}{1.\,2.\,3\ldots n-1}$$
$+$ etc.

Une involution stélégraphique d' un usage non moins étendu que les précédentes et plus belle encore par sa simplicité, et ses conséquences singulières, est la suivante, sur laquelle Hindenbourg á établi son invention des facteurs des nombres,*) au moyen d'un mésurage qui donne les nombres premiers par exclusion: méthode, qui n' a pas encore été égalée et qui est si prodigieusement rapide qu' une table continuée jusqu' à 10 millions ne serait que le travail de quelques an-

*) C. F. Hindenburg's Beschreibung einer neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen durch Abzählen oder Abmessen bequem zu finden. Leipzig 1776: opuscule de 120 pages avec des annexes et une planche.

nées. On ne peut que regretter que le public n'ait pas mieux secondé l'auteur.

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	etc.
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	etc.
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	etc.
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	etc.
etc.			etc.			etc.				

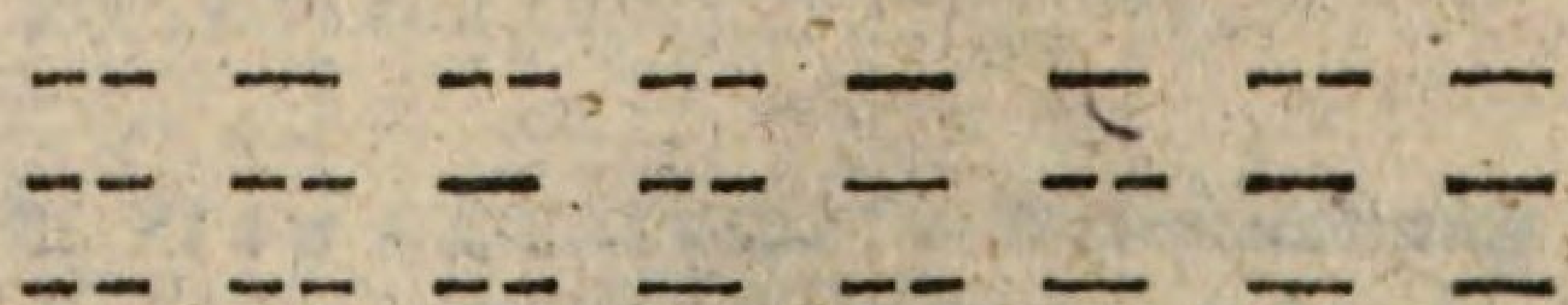
Un enfant et même une machine, (par exemple une roue à dix dents, portant les chiffres 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9, et dix roues portant un seul de ces chiffres autant de fois qu'on veut) peuvent construire cette table qui n'exige aucun calcul. Pour y accompagner chaque nombre de tous ses facteurs, il suffit d'appliquer une règle ou un patron et de copier des chiffres. Quand on veut se borner au plus petit et au plus grand facteurs, il ne faut qu'autant de mésurages qu'il y a de nombres premiers entre 1 et $\sqrt{1000000} = 1000$. Je le repète; on n'a pas apprécié, comme on le devait, cette ingénieuse simplicité.

Une autre involution stélégraphique rémarquable par sa simplicité, est la Dyadique:

	00000	=	0
	00001		1
	00010		2
	00011		3
	00100		4
	00101		5
	00110		6
etc.	00111		7
	01000		8
	01001		9
	01010		10
	01011		11
	01100		12
	01101		13
	01110		14
	01111		15
	10000		16
	etc.		etc.

E'crivez d' abord en ligne verticale 01010101 etc. puis cette même suite en doublant chaque chiffre, 00110011 etc., puis en quadruplant, octuplant etc.

Cette table est la numération de l' Arithmétique binaire, par laquelle Leibnitz expliqua si heureusement la figure mystérieuse des huit Coua inventée par Fohi et si fameuse à la Chine où elle fût de tems immémorial l' objet des recherches des lettrés.



La ligne brisée représentant 0 et la droite 1, cette figure est l' équivalent de

0 1 2 3 4 5 6 7.

C' est peut-être là l' origine du mystère attribué au nombre 7 dès la plus haute antiquité, s' il ne le doit pas aux phases de la lune, d'où nos semaines ont certainement la quantité des jours. Au reste je suis porté comme les Chinois à supposer plus qu' un système de numération dans les C o u a. Les trois lignes ont du rapport avec les trois dimensions de l' espace; la ligne simple et la ligne brisée peuvent correspondre à d' autres idées. Quoiqu' il en soit, ce monument de la plus haute antiquité annonce un dessein manifestement combinatoire.

Quelques fois l' ordre stélégraphique n' est pas apparent. Soit, par exemple, (*Développement Générale* §. 4) le cofacteur de o 1 dans F, qui est

56. 45. 34. 23. 12	=	56. 45. 34. 23. 12
46. 34. 23. 12		... 46. 34. 23. 12
56. 35. 23. 12		56. ... 35. 23. 12
36. 23. 12		 36. 23. 12
56. 45. 24. 12		56. 45. ... 24. 12
46. 24. 12		... 46. ... 24. 12
56. 25. 12		56. 25. 12
26. 12		 26. 12
56. 45. 34. 13		56. 45. 34. ... 13
46. 34. 13		... 46. 34. ... 13
56. 35. 13		56. ... 35. ... 13
36. 13		 36. ... 13
56. 45. 14		56. 45. 14
46. 14		... 46. 14
56. 15		56. 15
16		 16

Ecrit comme dans le membre droit, 56 alterne avec une place vuide, 45. 46 avec deux, 34, 34, 35, 36 avec quatre; et ainsi de suite, le nombre des places vuides étant constamment celui des remplies. Quant à la suite des nombres, elle est telle;

De bas en haut les groupes linéaires commencent a 16, 26, 36, 46, 56. Pour en faire des binaires verticaux, on ajoute le nombre immediatement inferieur 15, 25, 35, 45; pour changer les binaires en quaternaires, on ajoute le nombre suivant deux fois; c'est à dire 14. 14, 24, 24, 34, 34, pour changer les quaternaires en 8naires, on ajoute autant que besoin les nombres respectifs 13 et 23. Et ainsi de suite.

Le lecteur n' a pû manquer d' appercevoir que l' Analyse Combinatoire, en menant toujours directement au but, multiplie encore les solutions; ce qui sert au-moins à vérifer les résultats. Mais il en résulte encore des ressources pour les cas difficiles, et une abondance précieuse d'idées, qui multiplie les vues et encourage l' esprit à chercher, en lui donnant le sentiment de ses forces. Si par fois il semble que le problème n' a qu' une seule solution, il ne faut pas se décourager: en tournant et retournant en divers sens, on en decouvre d' autres, qui couduisent ordinairement plus loin. La permutation de *n* chiffres à 1, à 2, à 3, etc. se refuse aux involution exposées; la voici dans une forme involutoire nouvelle, où les nombres semblent ne suivre aucun ordre. Pour être plus court, et par là plus clair, je ne prendrai que les chiffres 1 2 3 4. La généralité n' est pas toujours dans le nombre indéterminé des choses.

1	2	3	4
2	3	4	1
3	4	1	2
4	1	2	3
1	3	4	2
2	4	1	3
3	1	2	4
4	2	3	1
1	4	2	3
2	1	3	4
3	2	4	1
4	3	1	2
1	2	4	3
2	3	1	4
3	4	2	1
4	1	3	2
1	3	2	4
2	4	3	1
3	1	4	2
4	2	1	3
1	4	3	2
2	1	4	3
3	2	1	4
4	3	2	1

Avec de l'attention on trouvera d'abord, que les quaternaires verticaux sont composés du cycle 1 2 3 4, commencé à un de ses quatre chiffres et terminé au voisin; 2341, 3412, 4123.

1 2 3 4, la prémiere évolution, est la permutation de 1 2 3 4 à un. J'en déduis la permutation à deux, en écrivant cette évolution 4 — 1 = 3 fois de haut en bas, et ajoutant a droite les cycles 2341, 3412, 4123.

Pour obtenir la permutation à trois, j'écris l'évolution binaire 4 — 2 = 2 fois de suite, et j'ajoute respectivement à droite l'un sous l'autre

341241232341, 412323413412,

provenant de 2341, 3412, 4123 consideré comme un seul cycle.

On procède analoguement pour rendre la permutation quaternaire. Il est palpable, que la méthode a lieu pour tant de chiffres ou choses qu'on veut: elle a cela de particulier qu'elle ne demande que la peine de copier.

Nous venons de présenter différentes loix stélégraphique ou verticales: elles peuvent être constantes, variables, à périodes, à cycles, enfin dérivées d'une norme quelconque F n. Leurs applications sont nombreuses dans les sciences. Les périodes constantes se rencontrent en Chronologie, où les cycles solaire et lunaire, les

indictions romaines, les périodes, juliennes, grégoriennes et autres sont de cette espèce. Le synchronisme de l'histoire, ou l'art de vérifier les dates au moyen du parallélisme des ères, produit des colonnes combinatoires où les rangs respectifs ont cette loi simple; n, $n+r$, $n+s$, etc. Dans une autre occasion je serai plus étendu sur cette matiere.

Les rangs obliques sous toute sorte d'angles, et même selon des direction courbes, ne sont pas moins utiles pour parvenir rapidement à certains résultats. Cette considération, en la poussant plus loin, conduit, de l'Analyse Combinatoire à la Géométrie Combinatoire et à la Méchanique Combinatoire, toutes des parties encore en friche de la *Science des Combinaisons.**)

Dans la seconde Sammlung Analytisch-Combinatorischer Abhandlungen, le Professeur Rothe, jeune géomètre d'un talent décidé**) et d'une haute esperance pour les mathématiques, a numéroté la loi des deplacemens. C'est une nouvelle carrière pour l'Analyse Combinatoire, où les applications

*) *Ordinis* et *concinnitatis* vna omnium seruantissima est *Ars Combinatoria*, et *campum* aperit obseruationibus et meditationibus et applicationibus *longe lateque vastissimum.* Hindenb. Syst. Combin. Praef. p. VI.

**) Cousin dit dans le discours préliminaire de son Astronomie physique „Qu'on me permette de remarquer que „les astronomes à qui l'on doit les découvertes les plus importantes s'étaient d'abord distingués dans l'Analyse Mathématique. Nous avons vû plus de vingt ans un de nos plus „célèbres observateurs (De la Lande) expliquer au Collège „Royal les ouvrages des Newton, des Euler, des Mac-„laurin, des Bernoulli, etc. et devenir, pour ainsi „dire, le créateur d'une chaire, destinée à perpétuer en France „le goût des sciences physico-mathématiques."

ne tarderont pas à se présenter. Le réellement curieux est toujours uni à l' utile, quoiqu' il n' y paraisse pas au premier abord. Pour en donner un exemple avec quelque variation, je choisis la permutation de *abcd* en indiquant les déplacemens à droite par les chiffres positifs 1, 2, 3, et ceux à gauche par les chiffres négatifs $\not{1}$, $\not{2}$, $\not{3}$,

abcd	0000
abdc	00$\not{1}$1
acbd	0$\not{1}$10
acdb	0$\not{1}\not{1}$2
adbc	02$\not{1}\not{1}$
adcb	0$\not{2}$02
bacd	$\not{1}$100
badc	$\not{1}$1$\not{1}$1
bcad	$\not{1}\not{1}$20
bcda	$\not{1}\not{1}\not{1}$3
bdac	$\not{1}\not{2}$21
bdca	$\not{1}\not{2}$03
cabd	$\not{2}$110
cadb	$\not{2}$1$\not{1}$2
cbad	$\not{2}$020
cbda	$\not{2}$0$\not{1}$3
cdab	$\not{2}\not{2}$22
cdba	$\not{2}\not{2}$13
dabc	$\not{3}$111
dacb	$\not{3}$102
dbac	$\not{3}$021
dbca	$\not{3}$003
dcab	$\not{3}\not{1}$22
dcba	$\not{3}\not{1}$13

Cette colonne de quaternaires à somme nulle, a donc malgré son asymmétrie apparente, une loi très simple.

Ce serait ici le lieu d'expliquer d'autres développemens combinatoires : mais faute des cadres ⌉ et ⌊ je devrais avoir recours à un nouveau système de signes dont je ne veux pas accabler gratuitement le lecteur, puisque je devrais les rétraduire dans mon ouvrage principal. La gène de l'impression m'a déja obligé à trop d'expédiens pour être supportablement clair et concis. En fait de caractères on ne saurait être assez économe de l'attention des géometres: ils préférent quelque complications aux abbréviations arbitraires, parce, que leur esprit combinateur saisit sans peine les conséquences et que la mémoire s'effarouche des suppositions répetées. Celle-ci, qui perd de son activité à mesure que le jugement prend le dessus, mérite les plus grands égards chez chaque sorte de lecteurs : l'âge adulte ne se familiarise aisement qu' avec les systèmes caractéristiques bien classés et sévèrement distingués dans leurs parties. C'est pourquoi les nombres, dont la suite est la plus frappante pour tous les hommes, seront constamment les meilleurs élemens des grandes combinaisons,*) tels que les développemens analytiques, les nomenclatures techniques, les langues universelles, etc. Les nombres renferment virtuellement l'idée d'ordre et c'est dans ce sens sans doute que Pythagore, le plus grand homme de la haute antiquité, y rapportait tout, et qu'ils sont nommés dans le chapitre neuvième de la sapience, où Dieu est dit

*) Operationum combinatoriarum *fundamentum* et veluti *norma* proposita est in *numeros* (ex ordine atque etiam per saltus progrediendo) *scribendi modo ac ratione*, vna fere atque vnica h. e. praestantissima; cum ipsi numeri, *Permutationum*, *Combinationum* et *Variationum* perfectissima et simplicissima omnis generis exempla praebeant — Totum itaque negotium ad *simplicissimas numerandi Leges* reduximus. Hindenb. Syst. Comb. p. XVI.

avoir formé le monde au moyen des trois sciences mathématiques.

Παντα μετρῳ και ἀριθμῳ, και ςαθμῳ διεταξε.

Il combina outes choses par mésure, nombre et poids:

Combina est la traduction la plus exacte, de διεταξε.

Le manque de cadres, que les lignes de l' impression ne rendent pas bien en petites formes, les seules commodes pour le calcul, m' empêche aussi de donner aujourdhui la relation des principales fonctions combinatoires. J' aurais adopté pour elle la notation de HINDENBOURG, parfaite autant que le système alphabétique le comporte: mais j' eûse dû alors expliquer par ordre une nomenclature savante; ce qui aurait changé en traité formel ce rapide apperçu de l' Analyse Combinatoire allemande, composé uniquement en faveur des personnes qui ne la connaissent que peu ou point du tout. En dévéloppant la méthode, je me suis surtout attaché à présenter son esprit et je me suis peu arrèté aux détails. Quiconque les aime, poussés aussi loin qu' il est possible, trouvera son fait dans les deux ouvrages suivans:

Grundriss der Combinationslehre, par le Professeur STAHL.

Lehrbuch der Combinatorischen Analysis, par le Professeur WEINGÄRTNER.

Ces ouvrages qui ont paru l' année dernière (1800), se recommandent par leur marche méthodique; on y désirerait plus d' applications; elles paraitront apparemment dans les secondes parties, que l' un et l' autre auteur fait espérer.

Il y a deux manières distinctes d' introduire à une théorie: la synthetique, qui établit une suite de

principes pour en donner après coup les applications; c'est celle de mon Développement général: elle est souvent sèche. Afin de délasser en variant, j'ai employé dans ce Polynome Combinatoire la manière analytique, qui se propose un problème, où les principes se présentent comme par hazard. Cette derniere, à beaucoup près la plus amusante, est aussi la plus instructive, en ce qu' elle est une invention continuelle pour le lecteur, dont elle accouche, pour ainsi dire, les idées, en revanche, les longueurs, et les lacunes deviennent souvent son partage. Mon Traité d' Analyse Fonctionnaire Combinatoire réunira les deux manières et sera d'une étendue convenable. Comme j' aurai pour lui des cadres d' une pièce, la notation leibnitzienne sera plus belle et sans aucune équivoque, outre qu' elle sera, généralement parlant, plus courte. Ce n' est qu' à cette notation à cadres, formée de peu d' elemens uniformement combinés, que j' attache quelque prix: ma présente n' en est qu' un surrogat imparfait.

Si dans cette courte esquisse je n' ai pû qu' effleurer la matière, j' ai dumoins tâché de ne pas mériter le reproche de négligence.

IV.

ANMERKUNGEN
ZU
BÜRMANN'S
ESSAI DE CARACTERISTIQUE COMBINATOIRE

VON

C. F. HINDENBURG.

1) Die vorzüglichsten hieher gehörigen Stellen aus LEIBNITZENS Schriften stehen am Ende der Vorrede meines *Nov. System. Perm. et Comb. p. X—XII.*; welchen ich aus einem Briefe von BÜRMANN an mich, noch folgendes hier beyfüge:

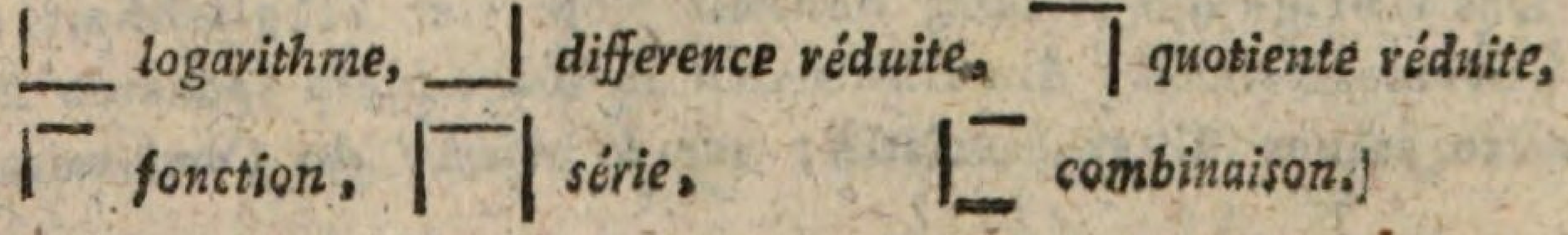
„LEIBNITZENS unermeſslicher Plan ist freylich nicht der „meinige; aber auch LEIBNITZ konnte jenen nicht ausfüh„ren. Ich habe seine *Opera* wieder aufmerksam durchgegan„gen, ohne auch nur die geringste Spur von Verwirk„lichung seiner Gedankenalgeber (*Analysis ſuprema, ad quam* „*constituendam*, wie LEIBNITZ sagt, *Alphabeto cogitationum* „*humanarum, et ad inventionem eius Alphabeti, Analysi Axiomatum* „*opus est. H.*) darinn angetroffen zu haben. In LEIBNITZENS „philosophischen Schriften, die RASPE gesammelt hat, sagt „dieser zwar, daſs in den Fragmenten eines von LEIBNITZ „angefangenen Werkes *de augmentis scientiarum*, sich Proben „der *Characteristicae Combinatoriae* befinden; aber ich glaube, „daſs sie nur zum Surrogate gehören, welches LEIBNITZ „(der in der Folge seine eigentliche Characteristik wohl „selbst für unausführbar halten mochte) an mehrern Orten „als Gedankenschrift vorschlägt: jede Sache einstweilen „mit einer charakteristischen Zahl zu bezeichnen."

Das Übrige des Briefes handelt von der Möglichkeit einer Universalschrift, die BÜRMANN in folgendem sechsten Abschnitte seiner Charakteristik; *sur la science des Combinaisons*,

appliquée aux autres sciences par l'Idéographie, vorgetragen, und ihr den Anstrich, zum Theil auch die Einrichtung, analytischer Functionenformen zu geben gewufst hat. Etwas davon habe ich unten (Note 20) beygebracht.

2) Das ist der Aufsatz, der hier (S. 5) nach der *Table des Matières* folgt, den ich mir von seinem Verfasser zur vorläufigen Bekanntmachung erbeten habe, und der mit dem folgenden 6ten Abschnitte: „Anwendung der Combinationslehre auf eine ideographirte Zeichensprache," in Verbindung steht. Man wird diese meisterhafte Darstellung um so mehr mit verdientem Beyfall aufnehmen, da sie eine vortrefliche An- und Übersicht des Ganzen gewährt, und die weitere Ausführung desselben wohl noch einigen Anstand nehmen dürfte; indem BÜRMANN wegen einer ganz neuen von ihm einzuführenden *Notation combinatoire*, beschlossen hat (und bereits thätig daran arbeitet) den Wissenschaften ein beträchtliches Mühe- und Kosten-Opfer zu bringen, und seine Lieblingsidee auszuführen, seine Symbolistik nehmlich halb gedruckt (*Première Partie*) halb gravirt (*Seconde Partie*) herauszugeben. Daraus ersieht man zugleich, woher in der *Troisième Partie* die *Section* 3me komme: *Instruction pour graver etc.* Der Verfasser empfiehlt nämlich darinn die Ausübung des Kupferstechens allen Schriftstellern, die neue Ideen und ihre Zeichen, denen die Buchdruckerkunst ihre Hülfe versagt, geschwind in Umlauf bringen wollen.

3) Von diesen *Principes généraux d'Algèbre, ou d'écriture analytique* hat mir der Verfasser bereits eine gut gerathene in Kupfer gestochene Probe zugeschickt. Die Zeichen darinn sind sämmtlich aus einer sehr einfachen Haupt- oder Grundform (ein Rectangel mit seinen beiden Diagonalen, der Linien Durchschnitte punctirt oder unpunctirt) abgeleitet. „Wie man in der Arithmetik (sagt BÜRMANN) Ziffern und „Zusammensetzungen derselben, oder Zahlen, hat, so nehme „ich in der Analysis analytische Ziffern und analy„tische Zahlen oder Functionen an. Die aus der „Hauptform abgeleiteten *chiffres analytiques* (die sich hier nicht „darstellen lassen) erkennt man an den schiefen Winkeln; „die *nombres analytiques* sind entweder wirkliche oder hypothe„tische Zusammenfügungen der *chiffres analitiques.* Durch rechte „Winkel werden bezeichnet



„Die beiden letztern machen die combinatorischen „Functionen aus; und so werden, arithmetische, analytische und combinatorische, Ziffern und Zahlen, „oder Functionen, leicht und sicher von einander unterschieden, und können ohne Zweydeutigkeit untereinander gemischt „vorkommen. Ein Umstand, der vornehmlich meine neue algebraische Schrift veranlafst hat." Einige Fragmente aus diesen *Principes généraux d' Algèbre* werden in der Folge (S. 22-28) im Auszuge mitgetheilt

4) „*Qui additione datum numerum producendi varietates, et „subtractione discerpendi, collegerit, quod utrumque eodem recidit, mi„hi notus non est. Viam autem colligendi comtnationes discerptionum, „ostendimus proxime. At ubi plures partes admittuntur, in„gens panditur abyssus discerptionum.*" LEIBNITZ *dissert. de Arte Comb. sub fin. Probl. III.* Diese Aufgabe habe ich (*Infin. Dign. §. XXII. p. 73. seq.*) zuerst gelöfst. Ohne sie, und einige damit verwandte, in Richtigkeit gebracht zu haben, läfst sich keine bedeutende Anwendung der Combinationslehre auf die Analysis machen. Vergl. *Nov. Syst. Comb. p. XVI.* und die dortigen Noten.

5) In der Vorrede zu dieser zweyten Sammlung habe ich von BÜRMANNS *Notation combinatoire*, wie ich sie damals kannte, gesprochen. Jetzt ist sie sehr vereinfacht und auf die beyden Zeichen ⊓ und [, mit ihren bestimmten Abzeichen für die nöthigen Modificationen, reducirt worden. Diese geben eine vollständige Sammlung von combinatorisch-involutorischen, auf numerische, lexikographische und andere Anordnungen sich beziehende, Lokal- und Classen-Zeichen, deren Auflösung von combinatorisch-analytischen Operationen abhängig ist. Mehrere meiner Freunde und Correspondenten haben in ihren Briefen an mich sich gewundert, dafs ich BÜRMANNS combinatorische Zeichnung, neben der meinigen, und zugleich mit Aufopferung der grofsen und kleinen deutschen Buchstaben, für Binomial- und Polynomialcoefficienten, in jener Vorrede öffentlich gut geheifsen habe. Ich denke über BÜRMANNS und meine Zeichen immer noch so, wie ich mich dort über beyde (S. XIX — XXI der Vorrede) ausführlich erklärt habe. Beyde können und werden, ohne Nachtheil der Sache, mit und neben einander bestehen; und wenn man die (Note 3.) nur beyläufig angeführte Bürmannische Bezeichnung von Ziffern und Zahlen aller Art bedenkt, so müssen, wenn eigentliche Buchstaben dabey überhaupt nicht gebraucht werden,

auch nothwendig die deutschen wegfallen. Erst dann, wenn BÜRMANN seine sämmtlichen Zeichen, ihrer Form, Beziehung und Wirkung nach, dem Publikum wird vorgelegt haben, wird solches ein vollgültiges Urtheil über dieselben, in Absicht auf ihren absoluten und relativen Werth, fällen können. Inzwischen kann ich die Güte seiner Zeichnung, der meinigen unbeschadet, im Voraus verbürgen.

6) So haben auch KARSTEN, KLÜGEL, PFAFF und Andere die Sache lange Zeit für *nugas difficiles* gehalten, wie sich Bürmann in einem Briefe an mich ausdrückt, worinn er sich einen Neubekehrten der combinatorischen Analysis nennt; und vielleicht sind KRAMP, KÄSTNER und LAGRANGE (Arch. d. Math. H. VII. S. 350. Note) viele Jahre hindurch die einzigen gewesen, die den Werth der Sache gekannt und gehörig gewürdigt haben. Auch da meine Classen- und Ordnungszeichen und die combinatorisch-involutorische Auflösung derselben, sich schon Beyfall und Achtung erworben hatten, zweifelte PFAFF noch an dem Nutzen meiner Lokalzeichen $p^m \varkappa n$, $\frac{p}{q} \varkappa (n+1)$ u. s. w. die er für unzweckmäſsig und überflüſsig ansah (Erste Samml. c. a. A. S. 124.) bis ihn diese zu den wichtigen Aufschlüssen (das. S. 125—152. und zw. Samml. S. 154—194.) mit Leichtigkeit führten. Der *savant ami*, der BÜRMANN zurecht gewiesen und auf bessere Gedanken gebracht hat, ist vermuthlich Doctor KRAMP gewesen, durch den jener zuerst TÖPFERS polemische Schrift hat kennen lernen (Arch. d. Math. H. VIII. S. 509, 510.). Der Umstand, daſs über die Sache in der Folge ein Streit entstand, hat auch in der That, so wie die vielfache Anwendung auf interessante Aufgaben und ihre rein-combinatorische Darstellung, die weitere Aufnahme und Verbreitung derselben sehr befördert. Hoffentlich hat auch meine Abhandlung (Erst. Samml. S. 153—304) vornehmlich aber die darinn aufgestellte und mit Beyfall aufgenommene Darstellung und Deduction des polynomischen Lehrsatzes aus dem allgemeinen Producten-Probleme, das Meiste beygetragen, alle noch übrigen Schwierigkeiten nnd Miſsverständnisse gründlich zu heben und gänzlich zu zerstreuen.

7) Diesen Gedanken hat schon vorher ein anderer würdiger Gelehrter gehabt, und ihn, in Verbindung eines Freundes, der die Redaction der Materialien über sich genommen hatte, bereits auszuführen angefangen. Ich würde Beyde um die Wissenschaften sehr verdiente Männer hier nennen, wenn das

Unternehmen, wäre dessen Vollendung auch nicht durch unvorhergesehene Umstände gehindert worden, ihrem wohlerworbenen Ruhme noch etwas zusetzen könnte. Aber freuen wird es jenen würdigen Mann und Meister in seinem Fache, der den Gedanken zuerst gehabt hat, wenn er sehen wird, daſs doch noch endlich die Sache in die Hände eines vortrefflichen Analysten gerathen ist, der, so wie Er, die mannigfaltigsten Kenntnisse aller Art besitzt, und, nicht weniger wie Er, gereist, und in England, Deutschland, den Niederlanden, Frankreich und Italien zu Hause ist.

8) Nach Eulers Vorgange und vielfältigen Beyspielen, auf welche sich auch Arbogast in seinem neuesten vortrefflichen Werke: *Calcul des Dérivations* (*Pref. p. XXII.*) beruft, kann man die deutschen Buchstaben in analytischen Schriften allerdings als zulässig und bekannt ansehen. Ich habe daher den Gebrauch derselben in vorkommenden Fällen, wo vielerley Buchstaben nöthig sind, in Schutz genommen, und zwar in der gerechten und billigen Voraussetzung — *damus hanc veniam, petimusque vicissim* — daſs, wenn die Ausländer etwas von den Deutschen lernen und gebrauchen wollen, sie sich auch die dafür getroffene Einrichtung gefallen lassen können; um so mehr, da durch Einführung anderer Zeichen statt der deutschen (neben den andern) Buchstaben, ein groſser Theil der schon bestehenden Harmonie meiner combinatorischen Formeln aufgehoben werden würde. Werden aber, wie Bürmann (Not 3, 5) thut, *alle* Buchstaben, überhaupt aufgegeben, so müssen denn doch auch die deutschen nothwendig wegfallen. Daſs aber wirklich der Widerwille der Ausländer gegen die deutschen Buchstaben, vornehmlich aus den im Texte ausführlich angegebenen Ursachen so groſs ist, als hier behauptet wird, und folglich die Einführung derselben nicht blos eingebildete, sondern wirkliche, noch itzt vorhandene, Schwierigkeiten hat; dafür kann ich, zu jenen in der Vorrede der zweyten Sammlung c. a. A. (S. IX. Note) angeführten Belegen, noch folgenden ganz neuen, gewiſs nicht unwichtigen, beyfügen, wo ein verdienter Veteran einer berühmten Akademie der Wissenschaften, unterm 28. Jun. 1800. an mich schreibt: *Pour Vos ouvrages combinatoires, ils meriteroient d'être traduits dans toutes les langues, et je crois réellement, que Vous rendriez service au public étranger, en supprimant les l e t t r e s G o t h i q u e s dans Votre notation. J'ai appris l'Allemand avec soin, il y a près des trente ans, j'ai voyagé longtems en Allemagne, et je n'ai jamais pu venir à bout de f o r m e r l i s i b l e m e n t ces c a r a c t è r e s*

Gothiques, ni même les lire dans l'écriture de main. Et je Vous assure que je n'ai pas manqué de bonne volonté.

9) Hier wird (in 1 und 2) das combinatorisch - analytische Geschäft im Allgemeinen kurz und bündig dargestellt. Alles beruht auf der arithmetischen Verbindung der Reihen und ihrer Glieder; die Hauptsache dabey ist die zu bestimmende Norm des allgemeinen Gliedes; diese giebt den tachygraphischen Ausdruck der combinatorischen Regeln; aus diesem mufs sich jedes verlangte Glied auf die möglichst einfache Art darstellen lassen; ein kurzer und bündiger Beweis sichert die Zulässigkeit des combinatorischen Verfahrens; einige ausgewählte, schriftlich wiederholte, Anwendungen desselben, verschaffen die nöthige Fertigkeit für die Ausübung. Die obengenannten Regeln beziehen sich auf die combinatorischen Operationen, die man, wie in Zahlen so auch in Buchstaben, in Beziehung auf ihre bestimmten Zahlenwerthe, arithmetisch- oder rein- combinatorisch anordnen, und klassenweise oder lexikographisch, nach jedem willkührlichen Gesetze, am besten aber involutorisch, vortragen kann. Anwendungen der lexikographischen und Klassen- Anordnung werden bey der Ausführung von (4 und 5) mehrere gegeben werden.

10) Der *Polynome Combinatoire* hat zwey Hauptheile. Der eine betrifft die Producte, der andere die Potenzen der Reihen (*Polynome Produit* und *Polynome Puissance*). Jener (das Polynomische Productenproblem) ist allgemeiner, dieser (der Polynomische Lehrsatz) zeigt einen sehr ausgebreiteten Nutzen für die Anwendung auch auf andere Sätze (z.B. den Taylorischen Lehrsatz auf das Polynomium bezogen) die ihn als Elementarsatz, voraussetzen. Den natürlichsten Übergang von jenem auf diesen, und wie das auf combinatorischen Wegen mit gröfster Leichtigkeit geschieht, habe ich (Erste Samml. c. a. A. S. 229, 230. No. 123 — 125.) gezeigt. Der (im Texte No. 3.) angeführte Lobspruch Professor KLÜGELS, betrifft diesen letzten Satz. Eine ausführliche Bearbeitung des *Polynome Combinatoire*, nebst wichtigen und interessanten Anwendungen desselben, hat mir BÜRMANN in seinen Zeichen vorgetragen, bereits vorlängst auf meine Bitte fürs Archiv zugesendet. Die Ausführung aber dieser Zeichen im Drucke fand Schwierigkeit, und hinderte daher die Publication dieses lehrreichen Aufsatzes, der aber durch die nachherige Vereinfachung der Zeichen nur noch mehr gewonnen hat.

11) Ein ausführliches chronologisch geordnetes Verzeichniſs aller hieher gehörigen Schriften findet man in Professor Weingärtner's Lehrbuche der combinatorischen Analysis, gleich nach der lehrreichen Vorrede zum ersten Bande (Seite XLIII — XLVIII.) in 26 Numern aufgeführt. Als Ergänzung sind darinn noch folgende Schriften theils einzuschalten, theils beyzufügen:

27. Chr. Kramp *de Aequationum primi ordinis solutione generali. Erfordiae*, 1798.

28. Murhardt combinatorische Behandlung der Kreisbögen und trigonom. Functionen; in der Götting. Societät vorgelesen.

29. *De reticulis cryptographicis. Auct.* Maur. de Prasse, *Lipsiae*, 1798.

30. I. C. Weingärtner's Lehrbuch der combinatorischen Analysis, nach der Theorie des Herrn Professor Hindenburg's ausgearbeitet. Erster Theil, Leipzig, bey Fleischer 1800. Zweyter Theil 1801.

31. C. D. M. Stahl's Einleitung in das Studium der Combinationslehre, Jena und Leipzig, 1801.

32. E. F. Rettberg, die Gesetze der nach ihrer Gröſse geordneten Brüche, mittelst der combinatorischen Analysis aufgesucht. Hannover, 1801.

33. *Du Calcul des Dérivations, par* L. F. A. Arbogast. *Strasbourg chez Levrault*, 1800.

(Dieses schätzbare Werk, eine erweiterte Anwendung des Differenzialcalculs, ist wegen einiger Berührungspuncte, die es mit der combinatorischen Analysis gemein hat, hier mit angegeben.)

34. Mein Programm als dam. Prokanzler der Universität, worinn gezeigt wird: *Functionum Polynomiorum per series adhibito Calculo Derivationum nuperrime invento, ad substitutiones in substitutiones operosas deducere, et in combinatorias tandem, quibus nullo modo carere potest, operationes et involutiones desinere. Lipsiae*, 1801.

12) Eine vergleichende Übersicht und Zusammenstellung beyderley combinatorischer Zeichen, der meinigen und der Bürmannischen, in einer besondern Tafel, ist nützlich und wichtig. Bürmann kann dabey auf den Dank einer groſsen Menge Leser rechnen, und gerade derjenigen, die, weil sie die Sache schon aus dem Gebrauche meiner Zeichen kennen, am besten im Stande sind, die seinigen geschwind zu übersehen und von ihrem Werthe ein vollgültiges Urtheil zu fällen.

13) Ich will hierüber BÜRMANN's Grundsätze aus zweyen seiner Briefe mittheilen: —

„Mein Augenmerk bey dem Baue der combinatorischen Zei-„chen war erstens, die am häufigsten vorkommenden „Functionen einfach zu bezeichnen; zweytens, sie so ein-„zurichten, daſs die combinatorischen und andern Functio-„nen, unter einander gemischt, allen analytischen Opera-„tionen unterworfen werden können, und so combinato-„rische Entwickelungen, Umkehrungen, Dif-„ferentiationen und Integrationen aufzustel-„len. Die Differenzial-Analysis führt geschwind zu Haupt-„resultaten, welche die combinatorische hernach ausarbeitet „und entwickelt. — Die ersten Anfangsgründe sind bey „mir kurz und gedrängt, enthalten wenige Kunstwörter und „ein Minimum von Erklärungen. Eben so sparsam bin ich „mit den Regeln gewesen. Meine Absicht ist, den Leser ge-„schwinder mit den nothwendigen (und nur mit den noth-„wendigen) Grundsätzen bekannt zu machen, um ihn, durch „Abkürzung der Vorlehren, sobald als möglich, mit interes-„santen Anwendungen zu beschäftigen, die den Nutzen der „Regeln zeigen und für die Wissenschaft einnehmen. Das „aufmerksame Abschreiben und Wiederholen einiger gut ge-„wählten Beyspiele machen weit schneller, als die verbalen „Vorschriften, mit den combinatorischen Regeln und Ver-„fahren vertraut

„*Segnius irritant animos demissa per aures,*
„*Quam quae sunt oculis subjecta fidelibus* —"

Vortrefflich! um so mehr, da BÜRMANN von der Sache nicht blos projectmäſsig spricht, sondern schon öfters Gelegenheit gehabt hat, die Methode, in seinen Vorlesungen, praktisch zu prüfen und ihren Nutzen zu bewähren. Wer wird sich von einem solchen Lehrer nicht gern und willig unterrichten lassen!

Daſs hierbey manche Besonderungen (*détails ou particularités*) dem Scharfsinn und Fleiſse des Lesers überlassen bleiben, entschuldigt BÜRMANN mit MONTESQUIEU: *Qui peut tout dire sans un mortel ennui?* Nur Lükken freylich müssen nicht gelassen werden, wie in dem *Esprit de Loix* mehrere vorkommen, die selbst der geübte Denker nicht leicht auszufüllen vermag.

14) Es scheint ins Unbegreifliche zu fallen, wie BÜRMANN zehn Alphabete der deutschen Bezeichnung blos durch zwey Zeichen und ihre Modification habe ersetzen können. Für diejenigen also, die meine Zeichnung

nicht kennen, will ich hier erinnern, dafs bey mir ein ganzes Alphabeth nur für ein Zeichen gilt. So bedeuten z. B. die grofsen lateinischen senkrecht stehenden Buchstaben, Combinationen; die schiefstehenden, Variationen; die grofsen deutschen, Binomialcoefficienten; die kleinen, Polynomialcoefficienten; u. s. w. Weil es aber bey den Combinationen und Variationen, mehrere Klassen; für einen und denselben Exponenten, mehrere Binomialcoefficienten; für die Buchstabenproducte, nach Menge und Verschiedenheit der Buchstaben in denselben, mehrere Polynomialcoefficienten giebt; u. s. w. so werden die ersten, zweyten, dritten, . . . dieser Klassen oder Coefficienten, durch die zugehörigen ersten, zweyten, dritten . . . Buchstaben dieser Alphabete, also nach der Folge der Buchstaben, bezeichnet. Die lexicographische Ordnung wird von der numerischen Klassen-Darstellung durch blumichte Buchstaben A, B, C - - - und insbesondere die involutorische Anordnung von andern combinatorischen durch die besondern Buchstaben J und J unterschieden. Von den beyderley Zeichen Mehreres in meiner Vorrede zu der zweyten Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen (S. XI — XIX.). Dafs ich schon vorher auf eine der Bürmannischen gleichbedeutende Zeichnung verfallen bin (das. S. XII, XIII und XVII). Die von mir gewählte Zeichnung durch Buchstaben, vereinigt das Minimum der Beschwerlichkeit im Drucke mit dem Maximum der Bequemlichkeit im Gebrauche; und so hat denn auch BÜRMANN meine Symbole für die vollkommensten schlechterdings anerkannt, die sich durch Buchstaben angeben und darstellen lassen. (Das. S. XX.)

15) BÜRMANN urtheilt über die beyderley Zeichen eben so wie ich: „Sie werden, ohne Nachtheil der Sache beyde „mit und nebeneinander bestehen.“ Was beyden zu statten kommt, habe ich (Erste Samml. c. a. A. S. XIX, XX.) angegeben. Schon längst bekannte, nicht erst zu lernende; durch den täglichen Gebrauch geläufige; bey ihrer vorlängst festgesetzten Ordnung und Folge so gut und harmonisch zu benutzende; mit bestimmten Namen bereits versehene Zeichen; die sich bequem lesen und schreiben lassen — dergleichen die Buchstaben sind — werden immerfort Freunde und Anhänger finden, und da, wo sie bereits im Gange sind, gewifs fortdauern. Inzwischen kann es nicht fehlen, dafs BÜRMANN's in

ihrer Form so einfache und sich auszeichnende, der Bedeutung nach faſsliche und in der Anwendung leichte Zeichen, nicht blos bey Ausländern (vornehmlich solchen, denen die deutschen Buchstaben fremd, also beschwerlich zu lesen und nochmehr zu schreiben, sind) sondern auch selbst in Deutschland verdienten Beyfall finden, und den Geschmack an der combinatorischen Analysis sehr werden ausbreiten helfen; wozu die häufigen Anwendungen, die BÜRMANN von seinen Zeichen auf wichtige und interessante Aufgaben gemacht hat, nicht wenig beytragen werden.

16) Ich billige es sehr, daſs BÜRMANN die von LEIBNITZ und BERNOULLI gebrauchten so zahlreichen Kunstwörter unbenutzt vorbeygegangen ist, zumal da die wenigsten auf das sich beziehen, was hier die Hauptsache ausmacht: wirkliche Darstellung der Verbindungen gegebener Dinge. Ich habe einige dieser technischen Benennungen (*Nov. Syst. Perm. et Comb. p. IV — VI. Sect. α*) erklärt, aber wenig oder gar keinen Gebrauch in der Folge davon gemacht; die beybehaltenen jedoch genau in dem Sinne gebraucht, den ihnen ihre Urheber gegeben hatten. Dagegen kommen einige von mir geformte, desto häufiger in meinen und Anderer combinatorischen Schriften vor; und ich habe um so weniger Bedenken getragen, sie aufzuführen, da sie, durch die Umstände der Sache gleichsam von selbst herbeygeführt wurden; auch passende und Hauptbegriffe bezeichnende Kunstwörter vornehmlich geschickt sind, sich kurz und präcis auszudrücken. Ich will hier die wichtigsten anführen und neben einander stellen:

„Combinatorische Elemente und ihre Zahlenwerthe; Com„binatorische Operationen; Zeiger; Complexion; Klasse; „Ordnung; Summen- und Distanzexponent; gut geordnete „Complexionen, Ordnungen und Klassen, mit und ohne Wie„derholung, an sich und zu bestimmten Summen; Lokalzei„chen und ihre combinatorischen Werthe; verbundene, Scalen „für jene und Zeiger für diese; arithmetisch- und rein-com„binatorische, recurrirende und involutorische Form; arith„mographische, lexikographische und stelegraphische *) In„volution und Evolution; u. s. w."

*) Säulenförmig (in mehrern verticalen Reihen nebeneinander, in die Tiefe [Arch. der Mathem. H. I. S. 15.]) geschriebene combinatorische Anordnung oder Involution. Man könnte auch stylographisch (von στύλος, *columna*) schreiben. Ich ziehe aber stelegraphisch vor. Denn einmal

17) Daher läſst sich jede Zahl jedes Systems von einer unbestimmten Anzahl Grundzeichen oder Ziffern, allgemein durch die Reihe

$$\cdots\ dx^3 + cx^2 + bx^1 + \alpha + \beta x^{-1} + \gamma x^{-2} + \delta x^{-3} \cdots$$

darstellen. Für das dekadische System ist bekanntermaſsen $x = 10$, und die Coefficienten von x drücken jeder eine der zehn Zahlziffern 0, 1, 2 --- 9 aus. Für ein System von n Ziffern oder Zahlzeichen wäre $x = n$, u. s. w. Man vergleiche meine Auflösung für *log. nat.* $(1 + \alpha z + \beta z^2 . \cdots)$ und die dortige Bemerkung (*Infin. Dign. p.* 109, 110.). Noch mehr; die erste und einfachste Aufgabe der Arithmetik: „Aus den gegebenen „Ziffern eines Zahlensystems, alle Zahlen nach der Ordnung; „oder: für jede gegebene Zahl, die nächstfolgende zu schrei-„ben" ist eine combinatorische, und in so fern in der Arithmetik nur ein Lehnsatz (*Lemma*) aus einer andern, vor aller Arithmetik vorhergehenden Wissenschaft, der Combinationslehre. Und eben diese Betrachtung ist es, die mich auf das Hauptmoment in der combinatorischen Analysis, auf die Involutionen aller Art leitete (Arch. der Math. II. I. S. 17—22.) BÜRMANN bemerkt sehr wahr, die ersten und einfachsten Regeln der Arithmetik seyen nichts anders als eine Numeration unter verschiedenen Ansichten betrachtet; die arithmetischen Operationen sind nämlich blos bedingte combinatorische, wo man den absoluten und relativen Werth der Ziffern für die Zahlen, und dieser Zahlen Beziehung und Wirkung auf einander in Betrachtung zieht.

18) Die Analysis und Algebra hat man nicht immer genau und bestimmt genug von einander unterschieden. BÜRMANN sagt in einem seiner Briefe, wo er von der Analysis eben dieselbe Erklärung giebt, wie hier im Texte: „*on ne calcule que des* „*rapports, et ceux-ci ne sont que les nombres vulgairs modifiés arbi-* „*trairement; les chiffres généraux a, b, c, etc. ne sauraient répresenter* „*autre chose.* NEWTON *a donc très bien défini l'Analyse*: *Arithmé-* „*tique universelle.* *J'appelle avec* BÉZOUT, *Algèbre, la no-*

wird *stele* oder *stela* beym VITRUV überhaupt für Säule gebraucht; dann heiſst στήλη insbesondere jede Säule, in Rücksicht einer darauf befindlichen nachrichtlichen Aufschrift; und so kann es eine Gränzsäule, Friedenssäule, Bundessäule, Grabsäule (einen Leichenstein) und, nach dem Gebrauch unserer Zeiten, eine Postsäule, einen Wegweiser etc. bedeuten. Und was sind denn die verticalen Buchstaben- oder Zahlencolonne anders, als Säulen mit Aufschriften? — Wegweiser für die Involutionen?

„tation tachygraphique, qui est à l'Analyse ce que les notes de la „Musique sont à la composition.“

„Deux expressions du même nombre, ou deux fonctions de même „valeur, prennent le nom d'équation, dès qu'un des élemens est à de-„terminer. Si plusieurs le sont, l'équation sera susceptible d'autant „de formes, qu'on voudra, puisqu'au moins un des élémens demeurera „arbitraire. C'est sur ces équations qu'opère le calcul des différences „de tout genre; calcul, qui a l'évaluation des fonctions, pour objet, et „pour ressource dans les cas difficiles, le dévéloppement en for-„mes plus commodes.“

Bürmann setzt also das Geschäft der Analysis in die Auffindung und Bestimmung der Norm der technischen Operationen für die zu suchenden Gröſsen; die Norm selbst aber, sowohl dem Ausdrucke als vornehmlich der Auflösung nach, gehört der Algebra zu. Dieser Unterschied kommt mit dem, wie ihn Professor Klügel (Erste Samml. c. a. A. S. 48, 49) festsetzt, im Wesentlichen überein. Zu den vorlängst bekannten, sehr mannichfaltig verschiedenen Normen oder Formen der Gröſsen, ist nun neuerlich die combinatorische hinzugekommen, und in die Analysis von mir eingeführt worden. Die *Tachygraphie combinatoire*, wie sie Bürmann nennt, zeigt sich am wirksamsten in den combinatorischen Involutionen, dieser ganz eignen, an Einfachheit und Leichtigkeit der Darstellung und Entwickelung alles übertreffenden, Construction der gesuchten Gröſsen aus ihren Elementen: wo man Alles, ohne vorgängige Reduction, sogleich gut geordnet, findet, wo das Auge, mit Einem Überblicke die gesetzliche Ökonomie weit schneller auffaſst und dem Verstand überliefert, als es der blos verbale Vortrag nicht zu thun vermag. Von diesen wichtigen Hülfsmitteln der Analysis, die sich gewöhnlich auf bestimmte Summen beziehen, habe ich in den (Erste Samml. c. a. A. S. 52—54. Note c) angeführten Stellen ausführlich gehandelt, denen man noch die lexicographischen und arithmographischen ganz vollendeten Involutionen zu unbestimmten Summen (Das. S. 202. und 204.) beyfügen kann. Beyde geben und verschaffen, wie schon Prof. Pfaff (Arch. der Math. H. VII. S. 348. Note) bemerkt hat, deutlich gezeichnete, allgemeine Formeln, die von den blos in Worten weitläuftig ausgedrückten Regeln sehr lebhaft abstechen.

„Jede Function (sagt Bürmann in einem Briefe an mich) „ist ein arithmetischer Satz, nämlich die (meistentheils „tachygraphische) Vorschrift der arithmetischen Zähllarten, „welche die Function in eine Zahl umsetzen. Function könnte

„also auf deutsch Satz übersetzt werden, und Analysis Satz-„kunde, welches mit dem Holländischen *Stellkonst* überein„käme, und Algebra (in BEZOUT's Sinne, nach dem ungelehr„ten Sprachgebrauche: *c'est de l'algèbre pour moi*) würde Satz„bezeichnung heifsen müssen." BÜRMANN will jedoch diese deutschen Namen keinesweges zum Gebrauche empfehlen. Er hat dadurch nur die Bedeutung jener Benennungen in der Kürze angeben und nachweisen wollen. Von der Etymologie des Worts Algebra und von der *Cosa* der Cossisten unter andern auch KÄSTNER, in der Vorerinnerung zur dritten Ausgabe seiner Analysis endlicher Gröfsen.

19) Man kann den nützlichen Gebrauch approximatorischer Formeln und Vorschriften durch mehrere in der Astronomie gewöhnliche indirecte Verfahren sehr gut rechtfertigen. Ich will hier nur der häufigen Anwendungen der *Regle des fausses positions* gedenken, „*qui rend les Méthodes indirects, et leur „ôte cet air d' élégance qui plaît tant aux Géometres. Mais comme ces „méthodes sont moins compliquées, plus intelligibles, et plus faciles „dans la pratique, elles sont d' un très-grand secours dans l' Astrono„mie, et même, lorsqu' elles vont au but par un chemin sûr et abrégé „elles sont préférables aux Méthodes directes, qui suppo„sent souvent dans les observations, une précision à la quelle il est im„possible d' atteindre, et qui par là deviennent inutile dans la pratique.*" (*La Caille Leçons elem. d'Astron. Avertiss. p. X.*) Wer sucht wohl die Wurzeln der Gleichungen vom dritten und vierten Grade nach CARDAN's und BOMBELLI's Regel, und zieht ihnen nicht vielmehr die indirecten Annäherungsverfahren zum Gebrauche weit vor? Wie viel Formeln hat man nicht in der Dioptrik aufgeführt, die alle Empfehlung von Seiten der geometrischen Genauigkeit haben, die aber so verwickelt sind, dafs man erst von ihrer Schärfe nachlassen mufs, um sie praktisch brauchbar zu machen; und wieviel hat nicht hier der einzige EULER durch Einführung geschmeidigerer und approximatorischer Formeln geleistet!

20) Auch von seiner Ideographie, oder der *science des Combinaisons, appliquée aux autres sciences, par l'Idéographie*, hat BÜRMANN ausführliche Proben mir zugesendet; davon hier in der Kürze nur Folgendes, da sich die Figuren dazu nicht mit vorlegen lassen. BÜRMANN geht von einem *Paradigme général* oder *Prototype des grammes* aus, und leitet davon seine *monogrammes, dyogrammes, trigrammes - - - polygrammes* ab. Auf diese folgen einige *Distinctions* und *Arithmogrammes, on lettres-mots idéographiques, numériquement classés*; und nun *Dérivation (aux*

six places du paradigme); *Inflexion (aux mêmes places indistinctement)*; *Interponction*; und endlich die *Syngrammes, ou arithmogrammes, plus ou moins modifiés.* Dies sind schon modificirte Phrasen. Wie in der Algebra, stellt hier ein stenographisches Symbol oft die Aussprache mehrerer Zeilen vor. Auch ergiebt sich aus den vorgelegten Beyspielen, daſs diese Ideographie zugleich eine wahre Tachygraphie ist, und es noch um so mehr wird, daſs (weil Bürmann alle seine *grammes simples* an Linien setzt oder anhängt) man, wie für die Noten in der Musik, im Voraus linirte Blätter parat haben kann, die *grammes* darauf zu schreiben. Freylich muſs man, um sich diese Zeichen nach ihrer Bedeutung und Zusammensetzung geläufig zu machen, ein ernstliches Studium darauf verwenden, das aber dadurch ungemein erleichtert wird, weil diese Ideographie combinatorisch-analytisch ist. Andere pasigraphische und stenographische Zeichnungen, die ich damit verglichen habe, sind zu gekünstelt, und das gröſste unmodificirte Wort ist nach Bürmann's Ideographie leichter zu schreiben, als in der Pasigraphie nach Memieu ein Buchstabe.

„Mit der Ideographie (schreibt mir Bürmann) ist es wie „mit der combinatorischen Analysis; sie schreckt nur bis man „damit bekannt ist. Sie ist nicht viel schwerer als die Algebra, „aber gewiſs sehr viel leichter als die chinesische Schrift (eine „unvollkommene Ideographie), welche man doch in einigen „Jahren geläufig lesen lernt, wie mich Reisende, die im Lande waren, versichert haben. Eine gute Ideographie läſst sich „viel geschwinder lesen, als gewöhnliche Schrift z. B. $\iint Xdxdz$, „welches Wort wir nie so deutlich darstellen werden. Aber freylich müſste die Ideographie schon so weit als die Algebra seyn. „Dazu ist denn nöthig, daſs man die Versuche häuft, und daſs „man nicht, wie bisher immer geschehen ist, selbige ihrer Unvollkommenheit wegen gänzlich verwirft."

21) Proben davon giebt das zunächst folgende *Développement général* (*no. II*) und das *Polynome combinatoire* (*no. III.*); ein Auszug aus den ausführlichern, mir früher zugesendeten (10) worinn zugleich die Bürmannische Zeichnung so weit abgeändert worden ist, als nöthig war, um solche durch gewöhnliche Typen im Druck darstellen zu können. Was Bürmann weiterhin behauptet, die Differenzial-Analysis von der combinatorischen zu trennen, sey beyden nachtheilig, man müsse sie vielmehr innig mit einander vereinigen und amalgamiren, ist sehr wichtig, und nur eine neue Bekräftigung dessen, was er schon anderwärts (Arch. d. Math. II. VIII. S. 495.) geäus-

sert hat. Der dort, in meiner zweyten Sammlung combinatorisch - analytischer Abhandlungen, nachzuliefern versprochene Aufsatz von Bürmann, wird, seinem Inhalte nach, aber beträchtlich erweitert und vervollkommnet, nun in dessen eignem Werke an seinem gehörigen Orte erscheinen.

22). Professor Arbogast hat in seinem Buche nur ein einziges Beyspiel dieser Art (*no.* 440.) beygebracht. Von diesem Abschnitt wird es genügen hier blos den Anfang und den Schlufs anzuführen: „*Voici un exemple où l'indice n de* D *est* „*une fraction.*" In diesem Beyspiele, wo $n = \frac{1}{2}$, findet Arbogast nach seinem Ausdrucke $D^{\frac{1}{2}}\, 1^{\frac{1}{2}} \cdot D^{-\frac{1}{2}}\, 1^{\frac{1}{2}}$, den Viertel-Kreis, oder

$$\frac{1}{4}\pi = \frac{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot 10\cdot 10 \cdots}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot 11 \cdots}$$

also den bekannten Bruch nach Wallis. Und nun der Schlufs: „*Je ne m'étendrai pas d'avantage: je n'ai voulu qu'indiquer l'usage* „*qu'on peut faire des dérivées à indice fractionnaire et reveiller par là* „*l'attention sur les différentielles à indice fractionnaire, sujet, qui a été* „*peu cultivé jusqu'à présent.*" (*Du Calcul des Dérivations* p. 374.) In demselben Werke (*no.* 456. p. 388.) hat Arbogast eine doppelte Entwickelung der oben im Texte stehenden Function $\Sigma^m y (\Delta x)^m$, wo $y = \varphi x$, angegeben und durch ein Beyspiel erläutert. Von diesen, wie dort bemerkt wird, stimmt die erste mit der von Bürmann dem *Institut national de France* (*Tom. II. des Mem. de l'inst. hist.* p. 16.) vorgelegten Reihe überein.

23) Bürmann's Verfahren, die Glieder der fortlaufenden Brüche, wie gemeine Brüche, neben einander, nicht wie gewöhnlich in schiefer Richtung unter einander, zu schreiben, ist bequem und Raum ersparend. So hat schon Dan. Bernoulli die Glieder solcher Brüche $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma} \ldots$ neben einander gestellt, und *Indices* genannt, weil sie nachweisen, bis auf wie weit man den continuirlichen Bruch verfolgen will. (*Nov. Comm. Ac Petr. T. XX. p.* 24 *sq.*) Bürmann's Bezeichnung gewinnt noch dadurch, dafs nach der Zahl oder dem Buchstaben im Nenner, noch die Zeichen + oder — der nächstfolgenden Zähler oder Brüche beygeschrieben werden.

24) Meine combinatorischen Behandlungen der continuirlichen oder Folgebrüche stehen (Arch. d. Math. Heft I. S. 47.

K

68; H. II. S. 154-195; H. III. S. 319-336). Im letzten Aufsatze habe ich gezeigt, wie mehrere grofse Mathematiker (Euler, Lambert, Dan. Bernoulli) der Erfindung der combinatorischen Involutionen ganz nahe gewesen sind, ohne doch im geringsten etwas davon zu ahnden. Dasselbe ist in der Folge auch von de Moivre (Arch. d. Math. H. IV. S. 391) und de la Grange (Töpf. Comb. Anal. S. 123) erwiesen worden. Euler behauptete, das Gesetz, nach welchem Zähler und Nenner in den successiven Werthen der continuirlichen Brüche, aus den einzelnen Zählern und Nennern ihrer Glieder sich zusammen setzen, sey nicht leicht durchzusehen (H. III. S. 322); und dennoch liegt das Gesetz auf demselben Wege, den er eingeschlagen hatte. Die Weitläuftigkeit, in die man durch das gewöhnliche Verfahren geräth, führte Dan. Bernoulli'n auf eine Abkürzung, die er *praestantissimum compendium* nannte, und die im Grunde nichts anders ist, als Eulers Regel, nur symbolisch ausgedrückt. Den letzten Schritt, den Bernoulli noch zu thun hatte, die einzelnen Glieder der Zähler und Nenner für die reducirten Werthe der Brüche, nicht neben, sondern unter einander zu stellen, und so in eine figürliche Anordnung zu bringen, die diese Glieder fast laut von ihm forderten (Das. S. 333, 334); diesen Schritt that Bernoulli nicht, und verfehlte so die letzte und wichtigste aller Abkürzungen — die combinatorische Involution — die das Gesetz, das Euler suchte, und er (Bernoulli) auf dem Fufse verfolgte, ohne es erreichen zu können, ganz offen vor Augen legt, und so durch sinnliche Anschauung dem Verstande überliefert. Darauf pafst nun Bürmann's Äusserung oben im Texte, und er hat grofse Vorgänger auf diesem Wege. Was die von Bürmann weiter hin angeführten *procédés combinatoires* von Lagrange anbetrift, so findet man solche in verschiedenen Stellen seiner Schriften, mehr oder minder entwickelt (Arch. der Math. H. VII. S. 363 - 369). Die dort (S. 368) nur angegebene nicht ausgeführte Bestimmung des allgemeinen Coëfficienten der unbestimmten Potenz des Polynoms, ist combinatorisch in aller Form.

25) Woher es gekommen, dafs Jacob und Johann Bernoulli, dafs Euler und andere grofse Mathematiker, die Leibnitzen's Schriften gewifs fleifsig gelesen haben, die Vortheile der combinatorischen Analysis, bey so starken und nachdrücklichen, nicht selten ekstatischen Empfehlungen und

Lobsprüchen derselben, selbst nach einer von Leibnitz ausführlich aufgestellten Probe — der Auflösung eines sehr verwickelten Problems — dennoch übersehen haben; davon habe ich in der Vorrede zu *Infin. Dign.* p. XVIII, XIX, ingl. *Nov. Syst. Combin.* p. XVI. Note (*q*) die Ursache angegeben.

26) Leibnitz hat von seiner Rechenmaschine selbst eine kurze Beschreibung und Abbildung (*Opp. T. III. No.* LXXIV, p. 413 — 415. *Fig.* 85; *it.* p. 27, 28) gegeben. Späterhin ist die Maschine von Hannover nach Göttingen geschickt wordent (*Ibid. Praef. Lud. Dutens p.* IV.) Kästner hat sie aber nicht, wie Dutens daselbst sagt, wieder hergestellt; sie befand sich noch im Jahre 1778 ganz ungangbar auf dem Göttingischen Observatorio, wo ich sie selbst gesehen habe. Hahn's, Müllers und Anderer Rechenmaschinen sind gleichfalls, aus eignen ausführlichen Beschreibungen bekannt. Von Lamberts Verdiensten um Factoren- und andere, arithmetische, trigonometrishe und analytische Tafeln, zeigen seine Beyträge zum Gebrauch der Mathematik im zweyten und dritten Theile, seine Zusätze zu den trigonometrischen und logarithmischen Tafeln, und der 5te Band seines deutschen gelehrten Briefwechsels. Hierher gehört auch meine „Beschreibung — Zahlen, durch Abzählen oder Abmessen — zu finden, nebst Anwen„dung der Methode auf verschiedene Zahlen, besonders au„eine darnach zu fertigende Factorentafel — Leipzig, 1776.“ Wie durch die darinn getroffene Grundlage für Factoren- und andere Tafeln, so wie durch die Bearbeitung derselben, der combinatorische Geist in mir geweckt und der Sinn dafür geschärft worden sey, ist (Arch. der Math. H II. S. 243 — 247) ausführlich gezeigt worden. Prof. Felkels zugleich unternommene Bearbeitung einer Factorentafel, veranlaſste einen Streit zwischen ihm und mir, der sich aber von selbst legte, da sich fand, daſs zwar Beyder Bearbeitung der Tafel mechanisch, dennoch aber Felkels rhabdologische Ausführung derselben von meiner combinatorischen ganz verschiedenen sey, leztere auch einen viel grössern Umfang für die Anwendung auf andere Tafeln zeige, als die erstere. Dies ist Lamberts Urtheil im 5ten Bande seines Briefwechsels (S. 194, 195) in welchem seine Correspondenz mit mir und Felkel enthalten ist.

Die grossen Vortheile, welche die in jener Beschreibung gelehrte combinatorisch-mechanische Bearbeitung der in Extenso vorgelegten Zahlen gewähren, sind auch nicht unbenuzt ge

blieben. Die Folgen davon sind drey grosse ausführliche Tafeln, die bey mir ganz vollendet, im Manuscripte liegen:

1) Eine Factorentafel, in welcher alle Primzahlen und alle einfache Theiler der zusammengesezten, durch 2, 3, 5, nicht theilbaren Zahlen, von 1 bis Million, ausgesezt befindlich sind. Das sehr günstige Urtheil, das Herr Director BERNOULLI, der diese Tafeln bey mir in Leipzig schon vor mehreren Jahren ganz vollendet in der Handschrift gesehen hat, darüber fällt (LAMB. Briefw. 5. B. S. 242), gründet sich darauf dafs ich bey dem Vortrage der Zahlen sowohl als ihrer Factoren ein ganz neues Zahlensystem (das Centesimalsystem) befolgt, und das gebräuchliche Dekadische zugleich so innig damit in Verbindung gesezt habe, dafs man die Zeichen der Zahlen und ihrer Factoren auf der Stelle, und ohne ein Blatt umzuschlagen in gewöhnliche dekadische Ziffern und Zahlen umsetzen kann. Es ist zu bedauern, dafs die grossen Kosten des Verlags mehrmalige Hindernisse der Ausführung in den Weg gelegt, und solche bis itz suspendirt haben.

2) Eine Tafel der Quadrat- und Cubikzahlen der Wurzeln von 1 bis Hunderttausend. Den ersten Entwurf dazu hat Herr von SCHÖNBERG gemacht (LAMB. Briefw. B 2. S. 309) Die Abkürzung des Vortrags ist, ohne Nachtheil der Deutlichkeit, sehr beträchtlich (Daſ. B. 5. S. 220).

3) Divisionstafeln, oder Tariffe aller Primzahlen von 1 bis 997. Eigentlich: mechanische Division aus Tariffen der zusammengehörigen, combinatorisch angeordneten, möglichen Dividenden, Quotienten und Reste dieser Zahlen. Von diesen Tariffen (Das. B. 5) an mehreren Orten. Die bequemste Construction derselben (Ebend. S 207 — 211) Von den fast unglaublichen Wirkungen einer solchen Zusammenstellung (Das. S. 215 und Arch. der Math. H. VII. S. 494 Note.)

Das hier Beygebrachte wird hinreichend seyn, den grossen Nutzen combinatorischer Anordnungen und Verfahren, zu mechanischer Aufsuchung der Zahlen zu bewähren, wodurch sich selbige weit schneller und sichrer finden lassen, als durch keinen der gewöhnlichen abkürzenden Rechnungsvortheile möglich ist.

27) Die *Eliminations des inconnues* gehören gröfstentheils zu den bestimmten, theils zu den unbestimmten, theils zu den mehr als bestimmten Aufgaben (*Problèmes determinés,*

indeterminés, plus que determinés.) Bürmann nennt sie mit Recht *éliminations étendues*; denn von den allgemeinen algebraischen Operationen, die sich combinatorisch erleichtern, oft nur auf diesem Wege darstellen und realisiren lassen, ist wohl keine so weitläuftig und schwierig, als diese, zumal je grösser die Anzahl der unbekannten Grössen und Gleichungen, und von je höherm Grade und mehrern Gliedern diese Gleichungen sind. Verschiedene Methoden und daraus abgeleitete Formeln: von Newton (*Arithmet. univ. p.* 57 — 64); von Euler (*Mem. de l' Ac. des Sc. à Berlin, année* 1745. p. 243 — 248) *année* 1764. p. 91 — 104; *Introd. in Anal. Inf. L. II.* p. 263 und p. 265 *seq.*); von Lagrange. (*Mem. — Berlin, année* 1769, p. 303 — 318) Übrigens ist das Eliminationsproblem eins von denjenigen, wo man schon vorlängst combinatorische Hülfe gesucht hat. So hat z. B. Cramer (*Analyse des lignes courbes, Appendice, de l' evanouissement des inconnues p.* 656 *seq.*) gezeigt (Das. *p.* 658) dafs, bey gegebenen einfachen Gleichungen, die Elimination auf den Permutationen der Coefficienten dieser Gleichungen beruhe; auch *p.* 660 — 676) den wichtigen Fall für zwey Grössen x, y und eben so viel Gleichungen von den Graden m, n, eine (z. B. x) zu eliminiren, behandelt, eine combinatorische Formel dafür angegeben, und beyspielsweise auf die Gleichungen $x^3 - 2ax^2 + 4ayx - y^3 = 0$, und $ax^2 + y^2x - ay^2 = 0$) angewendet. Eine verbesserte combinatorische Anordnung der ersten Aufgabe von Cramer habe ich in meiner Vorrede zu Rüdigers *Spec. anal. de lin. curv. sec. ord.* und einen strengen combinatorischen Beweis seines Verfahrens hat Prof. Rothe (zweyte Samml. c. a. Abh. S. 263 ff.) nebst mehreren andern verwandten Untersuchungen, gegeben. Ein hierher gehöriges Hauptbuch, das aber viel weniger bekannt ist, als es zu seyn verdiente, ist die *Théorie générale des Equations algébriques; par M. Bézout. Paris* 1779. Die Bezoutischen Verfahren sind gröſstentheils (ohne dafs er sie selbst dafür gehalten oder daran gedacht haben mag) combinatorisch, aber in der Ausführung zum Theil sehr weitläuftig und ermüdend; wovon ich hier nur seine *Règle générale pour calculer, toute à la fois, ou séparément, les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré* (*p.* 172 — 187) als Beyspiel anführen will, das man mit der Cramerischen oder meiner Vorschrift (a. a. O.) vergleichen kann. Es ist daher sehr zu bedauern, dafs dem Verfasser zu der Zeit (1779) meine combinatorischen Operationen, Involutionen und Sätze noch nicht bekannt seyn konnten; wo-

durch sein Werk, zum gröfsten Vortheil der Wissenschaft, an Abkürzung und Deutlichkeit viel gewonnen haben würde. Es würde sehr verdienstlich seyn, wenn ein Analyst die Bezoutischen weitläuftigen Verfahren, Sätze und Regeln in die ächt-combinatorische Sprache und ihre darstellende Zeichen übersetzen wollte. Ein solches Unternehmen würde, wegen der reichen Ausbeute die es gäbe, den Dank des Publicnms nicht verfehlen.

28) Hierher gehören unter andern die stelegraphisch geordneten, von mir sogenannten cyclischen Perioden, und ihr Gebrauch in der Diophantischen oder unbestimmten Analytik (Leipz. Magaz. der Math. Jahrg. 1786. St. 3. S. 281. f.) eine combinatorische Auflösuug der von EULER und LAGRANGE schon behandelten Aufgabe: „alle Gleichungen vom ersten Grade, mit zwey oder mehrern unbekannten Grössen, in ganzen Zahlen aufzulösen". (Arch. der Math. H. VI. S. 216).

Eine der wichstigsten und weit sich erstreckende Anwendung der combinatorischen auf die unbestimmte Analysis, beruht auf der Auflösung der unbestimmten Gleichungen, wie $p + q + r + s +$ etc. $= m$, oder $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s +$ etc. $= n$, für gegebene m, n und α, β, γ, δ, ε... (jede Gleichung einzeln, für sich, oder auch beyde in Verbindung mit einander) in ganzen und bejahten Zahlen, die 0 nicht ausgeschlossen. Die erste Gleichung führt und bezieht sich auf Variationsclassen für den Zeiger $(0, 1, 2 \ldots m)$; die zweyte (für welche α, β, γ, δ ... gewöhnlich 1, 2, 3, 4 ... so, dafs $p + 2q + 3r + 4s \ldots + $ etc. $= n$) auf Summen von Combinationsclassen für den Zeiger $(0, 1, 2 \ldots n)$; Beyde Gleichungen zusammen, auf eine bestimmte Combinationsclasse, die beyden Gleichungen Genüge thut. Einzelne Beyspiele analytischer Aufgaben, mit Beziehung auf solche Bedingungsgleichungen, haben DE MOIVRE, JACOB BERNOULLI, und LAGRANGE gegeben. Sehr häufig und scharfsinnig findet man sie neuerlich von KRAMP (*Anal. des Réfract. astron. p.* 71 — 81. E. S. c. a. A. S. 102 — 117, und Z. S. c. a. A. S. 341 — 366) bey seinen combinatorischen Integralen oder Aggregaten, gebraucht und in Verbindung mit Zahlentäfelchen angewendet, deren Zahlen als zusammengehörige Werthe der p, q, r, s ... am leichtesten auf combinatorischen Wegen sich finden lassen, und eben des-

wegen eine combinatorische Auflösung geben. Die Auflösung solcher unbestimmten Gleichungen, auf dem gewöhnlichen Wege, würde in grosse Weitläuftigkeit führen (E. S. c. a. A. S. 119, 120). Bey mir kommen dergleichen Bedingungsgleichungen gewöhnlich nicht vor, weil ich dafür sogleich das zugehörige Zeichen der Involution der mehreren oder einzelnen Classen, mit untergeseztem Zeiger setze, und dadurch die Bedingungen jener unbestimmten Gleichungen im Voraus erfülle.

29. Huygens, Leibnitzens, Jac. und Dan. Bernoulli's, Moivre's, Monmort's, Euler's, Lagrange's, Laplace's, Condorcet's, Tetens und Anderer zahlreiche Schriften, und zum Theil tiefe Forschungen in dem Fache der Wahrscheinlichkeit und deren mannichfaltigste Anwendung auf allerley Gegenstände der Wissenschaften und Künste, der Gewerbe und des gemeinen Lebens, ſind zu bekannt, als daſs sie erst hier aufgeführt werden dürften. Hierbey liegt nun gewöhnlich die Anzahl möglicher oder nach gewissen Gesetzen beschränkter Verbindungen oder Versetzungen gegebener Dinge zum Grunde. Es giebt aber eine Wissenschaft, die weit inniger und natürlicher mit der Combinationslehre in Verbindung steht, als keine andere; die ausser der Anzahl jener Verbindungen und Versetzungen der gegebenen Dinge, noch ganz vorzüglich die wirkliche Darstellung derselben zum Zweck hat, und davon den erheblichsten Nutzen zieht — die Analysis. Proben davon haben vorlängst Leibnitz, de Moivre, Boscowich, Cramer und Bezout gegeben, auch haben insbesondere Leibnitz und Boscowich, die Vorzüge der combinatorischen Verfahren laut, und ersterer nicht selten mit unbegränzten Lobsprüchen, gerühmt. Gleichwohl scheint dies alles für die Wissenschaft verlohren gegangen zu seyn, so lange die ersten und einfachsten Gründe der Sache noch nicht aufgefunden und zu einem System verarbeitet waren; wodurch man erst hinterher die Wichtigkeit jener ersten Versuche und Verfahren gehörig schätzen, und dabey zugleich einsehen lernte, wie solche sich noch verbessern, weiter vervollkommnen und ganz vollenden lassen. (E. S, c. a. A S. 155 — 161).

30) Ein Beyspiel einer ausführlichen combinatorischen Darstellung von Bergmann, die Zahl und Zusammensetzung der sogenannten zwey- drey- vier- fünf-fachen (aus den zu seiner Zeit allgemein angenommenen fünf einfachen) Erden be-

treffend, zugleich mit Bestimmung der specifischen Verschiedenheit, habe ich (E. S. c. a. A, S. 155 Note) angeführt und nachgewiesen.

31) Das gilt vornehmlich von der, zum Lesen und Schreiben eben so leichten als undurchdringlichen und daher höchst-interessanten, Gitterschrift, wo die Einrichtung der dafür nöthigen Netze oder Gitter (*Chassis*) combinatorischen Gesetzen unterworfen ist, und in den gewöhnlichsten Fällen und für eine gegebene Anzahl von Fächern des Gitters, von der Auflösung einer combinatorischen Variationsaufgabe abhängt, Arch. der Math. H. V. S. 81 — 99 und De PRASSE, *Programma de Reticulis Cryptographicis. Lipsiae* 1798.

Alle Arten von Geheimschreiberey und ihre Entzifferung beruhen auf Verbindung gewisser Zeichen, und auf combinatorischen Versuchen, durch Wahrscheinlichkeiten geleitet, welche die Kenntnifs der Sprache, die der Chifferschrift zum Grunde liegt, an die Hand giebt. Nur ist keine andere so regelmässig eingerichtet, und so (obschon nicht absolut) unauflöfslich und unlesbar, als die Gitterschrift; und es ist merkwürdig, dafs der Urheber einer so bedeutenden Erfindung, nach so vielen Nachforschungen, noch immer verborgen ist. Von andern geheimen Schriften nur noch folgendes, in der Kürze: *Ars diuinandi occulte Scripta* (sagt WALLIS, ein grosser Meister in dieser Kunst zu seiner Zeit, in einem Briefe an LEIBNITZ) *est res non certis regulis coërcenda, propter infinitam varietatem ciphras ponendi — qnae a coniecturis principio positis inchoanda est, quae prout succedere vel non succedere deprehenduntur, vel prosequendae sunt, vel mutandae, donec quid certi constet. Sed tanti laboris est, vt vix sit qui velit ediscere* (LEIBN. *Opp. T. III. p.* 102). Nach LEIBNITZENS mehrmahliger Aufmunterung, WALLIS möchte doch die *Artificia Artis suae Cryptolyticae* mittheilen, da sie *fastigium quoddam subtilitatis simul industriaeque humanae* enthielten (Das. p. 118 auch 120, 129): antwortete WALLIS — *Vnum aut alterum docturus sum quibus sit Ars cryptolytica methodis aggredienda (si saltem Methodus dicenda sit vaga venatio) monstrando, quibus ego passibus indagando soleo procedere — Nec tamen eisdem semper; nam, pro vario ferarum genere, varianda est venatio* (Das. p. 133). Sehr wahr, und zugleich sehr schön gesagt!

B. Première Partie, Section troisième (S. 22 u. ff.)

Nach der oben (S. 3.) aufgeführten *Table des Matières, Première Partie* sollte dieser lehrreiche Aufsatz ein fragmentarischer Auszug aus der dortigen 3ten Section, jenem so eben hier abgedruckten aus der 5ten, voranstehen. Da ich aber um dessen Mittheilung erst späterhin beym Verfasser nachgesucht hatte, so erhielt ich ihn, nachdem jener bereits abgesezt war. Ich liefere ihn also nach, ohne Anmerkungen beyzufügen, deren er nicht bedarf; und es ist gleichgültig, ob man ihn früher als jenen, oder erst nach diesem an dem Orte lesen will, wo man ihn hier findet.

So viel, als erläuternde Nachweisung, zu der so interessanten und gedrängten Bürmannischen Übersicht der *Science des Combinaisons* in ihrer Anwendung auf die Mathematik überhaupt und die Analysis insbesondere. Diese leztere ist bey weitem die wichtigste, da sie mir die erste und nächste Veranlassung gegeben hat, die Combinationslehre ganz umzuformen, sie beträchtlich zu erweitern, und ihr durch bestimmte demonstrative Regeln und Vorschriften eine wissenschaftliche Form und Gestalt zu geben.

Eine höchst merkwürdige Anwendung der combinatorischen Analysis auf Reihen und continuirliche Brüche, für von einander ganz unabhängige Functionen, enthält (S. 29 — 50) das Bürmannische nervöse und vielumfassende

Développement général

aux fonctions arbitraires,

mit seiner Anwendung auf einige Hauptpuncte der Analysis, wodurch es zugleich mehr Bestimmtheit erhält. Die so kurze als unbeschränkte Theorie der Folgebrüche, bey denen die combinatorischen Auflösung vortheilhaft benuzt worden ist, kann zeigen, daſs der Verfasser im ersten Aufsatze (S. 17, 18) nicht zu viel davon versprochen hat, und man darf wohl erwarten, daſs das hier Beygebrachte nicht alles Inte-

ressante seyn wird, das über einen so lange und anhaltend verfolgten Gegenstand von ihm ist gefunden worden. Da das *Dévéloppement général* (ein ausgehobenes Stück oder Fragment aus dem Bürmannischen *Traité du calcul fonctionnaire combinatoire*) blos für Nichtanfänger und Kenner geschrieben ist, bey denen es mehr auf Fülle der Sachen und Gedanken, als auf umständliche Auseinandersetzung ankommt, die der Verfasser, wo und so weit es nöthig, in seinem gröfsern Werke selbst geben wird: so enthalte ich mich aller erläuternden Anmerkungen und Beyspiele. Nur die Leibnitzischen Coefficienten wie sie Bürmann von ihrem Urheber nennt, und ihren Gebrauch bey den combinatorischen Anordnungen (*Dév. gén.* §. 4, 12, 13) werden einige Bemerkungen nicht überflüssig machen — selbt für geübte Analysten, denen combinatorische Begriffe und Verfahren noch nicht recht geläufig sind.

A) Leibnitzische Coefficienten und ihre Anwendung (*Dév. gén* §. 4). Bürmann hat sich dieser Coefficienten (wo nehmlich Zahlen statt der Buchstaben gesezt werden) mit grossem Vortheil bedient, und so vermittelst der einfachsten Lokalzeichen (wie ich sie nenne) die gesuchte Entwickelung der Functionen ungemein erleichtert Der *locus classicus* für dergleichen Bezeichnung ist Leibnitzens *Noua Artis Analyticae promotio specimine indicata; dum Designatione per Numeros assumtitios loco Literarum, Algebra ex Combinatoria Arte lucem capit* (Leibn. *Opp. T. III.* p. 359 *et* 366, 367). Wer die *Opera* Leibn. nicht bey der Hand hat, kann diese merkwürdige Stelle in der Vorrede (*p.* XVII) zu meinen *Infin. Dignitt.* nachsehen; wo ich auch (*p.* XV, XVI) das Leibnizische *specimen* mit aufgeführt habe. Diese Bezeichnung macht die Grundlage zu der Leibnitzischen *Combinatoria characteristica*, von der dieser grosse Mann zwar oft gesprochen (mehrere Stellen von ihm, über den Nutzen der Combinationslehrer in der Analysis, und für eine allgemeine philosophische Sprache, stehen in meinen *Nov. Syst. Perm. et Comb. Praef. p.* X — XII) aber nichts davon entwickelt aufgestellt hat. Besonders gehört hierher noch die Stelle (*Opp. T.* III. p. 416 und im *Nov. Syst.* p. 35, 5) wo gezeigt wird, wie man die Coefficienten mehrerer Reihen deutlich durch Zahlen unterscheiden kann. Was dort Leibnitz beyspielweise für zwey Gleichungen nachgewiesen, das hat Bürmann auf zwey Reihen successiver Functionen angewendet, und dabey Functionen der Zähler von denen der Nenner durch zwey neben einander gesetzte

Zahlen oder Ziffern (Die ersten für die Zähler, die zweyten für die Nenner) bezeichnet und unterschieden, so, dafs die Unmöglichkeit, sich kürzer und zugleich deutlicher darüber auszudrücken unmittelbar dabey einleuchtet.*)

Noch mehr. Das von Bürmann (*Dév. gén.* §. 4) angegebene Gesetz für N, das allgemeine nte Glied, ist ganz leicht und einfach. Nur könnte es scheinen, dafs die darinn vorkommenden Buchstaben $a, b, c, d \ldots$, deren Werthe nachher einzeln angegeben, und durch eine in die Augen fallende Recurrenz bestimmt werden, eben deswegen zu Weitläuftigkeiten führten. Aber diese Recurrenz mufs, wie auch Bürmann erinnert, mit der in der Analysis sonst gewöhnlichen, oft so lästigen, nicht verwechselt werden. Sie ist combinatorischer Art (Zw. S. c. a. A, S. 34 und S. 48 — 50) und läfst sich involutorisch ausführen. Es wird nicht überflüssig seyn, wie das geschehen könne, hier in der Kürze nachzuweisen. Zu dieser Absicht will ich

I. In dem Bürmannischen Ausdrucke für N, statt der dortigen Buchstaben $a, b, c, d \ldots$ (nach dem von mir im Archive der Mathem. Heft I. S. 32 — 35 aufgeführten Verfahren) die Buchstaben $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ gebrauchen und so ist (*Dév. gén.* a. a. O.)

$$N = 1.\,on + \mathfrak{A}.\,o(n-1) + \mathfrak{B}.\,o(n-2) + \text{etc.} + \overset{-1}{\mathfrak{N}}.\,o1$$

Die $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ bezeichnen hier zweyerley; 1) Die Ordnung in der Folge (in II, IV und V) vorkommenden involutorischen Winkel, und 2) den Inhalt derselben, wie er in den Winkeln eingeschrieben steht; in welchen Falle meine $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ mit den Bürmannischen $a, b, c, d \ldots$ vollkommen übereinstimmen.

Die grofsen deutschen Buchstaben, in Beziehung auf die gehörigen Winkel, sind demnach hier eine Art Lokalzeichen, welche andeuten, wo man das was man sucht zu finden hat. Es wird hier *Continens pro Re contenta* genannt. Dieser In-

*) Eine andere Anwendung dieser bey mehrern Reihen so bequemen Leibnitzischen Beziehung auf das Eliminationsproblem, hat Prof. Rothe (Zw. S. a. c. A. S. 282 u. f.) gemacht und vielfachen Nutzen daraus gezogen,

halt giebt die combinatorische Anordnung mit der gröfsten Leichtigkeit, weil bey Construction der Evolutionen (in IV und V) die Winkel sämmtlich gefüllt werden.

II. Die regelmässig fortschreitenden Factoren: $0n, 0(n-1)$, $0(n-2)$, . . . 02 01 in dem obigen (*I*) Werthe von *N* haben keine Schwierigkeit. Den Inhalt der Coefficienten 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 . . . giebt die BÜRMANNISCHE Relation für die *a*, *b*, *c*, *d* . . . (*Dév. gén.* §. 4) und so findet man (in den dortigen Gleichungen für *a*, *b*, *c*, *d* . . . statt des Zeichens —, vor der *Hand* überall das Zeichen + gesezt) den Inhalt oder die Werthe von

$$\mathfrak{A} = (n-1)n$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}.(n-2)(n-1) + 1.(n-2)n$$

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{B}.(n-3)(n-2) + \mathfrak{A}.(n-3)(n-1) + 1.(n-3)n$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{C}.(n-4)(n-3) + \mathfrak{B}.(n-4)(n-2) + \mathfrak{A}.(n-4)(n-1) + 1.(n-4)n$$

u. s. w. f.

III. Aus dem Werthe für *N* in (I) findet man ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ nach und nach gesezt) die einzelnen A, B, C, D, E, F (*Dév. gén.* §. 4) nach der Ordnung:

$A = 01$

$B = 02 + \mathfrak{A}.01$

$C = 03 + \mathfrak{A}.02 + \mathfrak{B}.01$

$D = 04 + \mathfrak{A}.03 + \mathfrak{B}.02 + \mathfrak{C}.01$

$E = 05 + \mathfrak{A}.04 + \mathfrak{B}.03 + \mathfrak{C}.02 + \mathfrak{D}.01$

$F = 06 + \mathfrak{A}.05 + \mathfrak{B}.04 + \mathfrak{C}.03 + \mathfrak{D}.02 + \mathfrak{E}.01$

etc. etc. etc, etc.

wo die Werthe für 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 . . . aus (II) sich ergeben wenn man auch dort $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ successive sezt.

IV. Aus (II) kan man nun sogleich, worauf hier alles ankommt, für N folgende allgemeine Involution mit Winkeln 𝔄𝔄, 𝔅𝔅, ℭℭ, etc. und ihren Füllungen (wie Arch. H. I. S. 35) anordnen:

	𝔄		𝔅	ℭ	𝔇
𝔄	$n-1)\,n$	$(n-2)\,n-1)$	$(n-3)\,(n-2)$	$(n-4)\,(n-3)$	
𝔅	1°.	$(n-2)\,n$	$(n-3)\,(n-2)$	$(n-4)\,(n-3)$	
		$(n-1)\,n$.	$(n-3)\,(n-1)$	$(n-4)\,(n-3)$	
ℭ		1° .	$(n-3)\;n$	$(n-4)\,(n-3)$	s.
		$(n-1)\,n$.	$(n-2)\,(n-1)$.	$(n-4)\,(n-2)$	
			1°. $(n-2\;n$.	$(n-4)\,(n-2)$	w.
			$(n-1)\,n$.	$(n-4)\,(n-1)$	
𝔇			1° .	$(n-4)\;n$	f.
	n.	s.	w.	f.	

Die 1° in den lezten Gliedern der Winkel (hier und in II) ist kein Lokalzeichen, sondern die Zahl 1, und kann also als Factor weggelassen werden; wie auch in der Folge (in V...) geschehen ist.

V. Die allgemeine Involution (in IV) läuft wegen der $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$. . . etwas in die Breite aus. Für bestimmte Werthe von n z. B. für $n = 6$, oder für den sechsten Buchstaben F, fällt alles zusammen

	𝔄	𝔅	ℭ	𝔇	𝔈
𝔄	56	45	34	23	12
		64	34	23	12
𝔅			56. 35	23	12
			36	23	12
ℭ				56.45.24	12
				46.24	12
				56.25	12
				26	12
𝔇					56.45.34.13
					46.34.13
					56.35.13
					36.13
					56.45.14
					46.14
					56.15
𝔈					16

Nach (II) ist nämlich $\mathfrak{A} = (n-1)\,n$, für das nte Glied N. Für das 6te, F, wäre also ($n = 6$ gesezt) $\mathfrak{A} = 56$, der Anfang der Involution für die Coefficienten dieses Gliedes; woraus man die erste Complexion 56. 45. 34. 23. 12, und alle übrigen, wie die Winkel nachweisen, ohne Schwierigkeit ableitet (II, IV)

VI. Diese Involution gilt für alle Glieder oder Theile von F, wenn man nach einander, was

in den Winkeln 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈 steht

mit den Factoren 05, 04, 03, 02, 01 multiplicirt, und 06 als Anfangsglied voransezt.

VII. Die Glieder der Werthe von 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 . . . haben nicht durchgängig das Zeichen + wie man (in II) von der Hand angenommen hatte. Wegen der Zeichen ist also zu merken, daſs jedem Producte in den Winkeln, das aus einer geraden Anzahl Factoren besteht, das Zeichen +, aus einer ungeraden Anzahl aber, das Zeichen — vorzusetzen sey. Und so ist (III, V)

$$F = 06 - \underline{56}\,\Big|\, 05 + \left.\begin{array}{r} 56.\,45 \\ -\quad 46 \end{array}\right| \; 04 - \left.\begin{array}{r} 56.\,45.\,34 \\ +\quad 46.\,34 \\ +\quad 56.\,35 \\ -\quad 36 \end{array}\right| \; 03 + \text{etc.}$$

Hieraus erhellet zugleich, woher die verschiedenen Zeichen bey den Coefficienten des 9ten Gliedes (*Dév. gén.* §. 4) kommen, und warum Bürmann (etwas weiter vorher) in den Werthen der B, C, D, E die Zeichen + und — abwechselnd nur immer für die ersten Complexionen gesezt hat; weil sich nehmlich daraus die für die übrigen, untergesetzten, sogleich übersehen lassen.

Anmerkung. Ich habe schon anderwärts (Arch. der Mathem. H. II. S. 160 — 195) den Reichthum und die groſse Mannichfaltigkeit combinatorischer Gesetze für die Werthe der continuirlichen Brüche angeführt. Das überaus leichte Fortgangsgesetz bey obiger Involution (IV, V), wo Werthe von Werthen abgeleitet werden, ist zum Theil stelegraphisch (S. 140. Note). Ein ganz und durchaus stelegraphisches für dergleichen Brüche hat Prof. Rothe (a. a. O. S. 181 — 174) angegeben; ein anderes von Bürmann (hier S. 123) für die hiesige Involution, ist von diesem ganz verschieden, und dadurch merkwürdig, daſs es zeigt, wie anfangs einzelne Factoren, dann Factorengruppen von 2, 4, 18, 6 . . . Factoren hinter einander, sich nach bestimmten Intervallen in den auf einander folgenden senkrechten (stelegraphisch angeordneten) Colonnen wiederholen *)

*) Die stelegraphischen Anordnungen stellen sich zuweilen ganz unerwartet dar. So z. B. Prof. Rothens Aufführung der Stellen-

Der Reichthum combinatorischer Veränderungen und ihrer Darstellung ist unerschöpflich!

B) Vergleichung der Bürmannischen, und Burkhardtischen Hindenburgischen und Töpferischen Zeichen und ihrer Zusammenstellung bey Auflösung des Problems (*Dév. gén.* §. 13)

Bey nurgedachtem Probleme

$$\textit{Sommer}\ \frac{n'}{n-1,+}\ \frac{n-1'}{n-2,+}\ \frac{n-2'}{n-3,+}\cdots\frac{2'}{1,+}\ \frac{1'}{0,}$$

kann man fragen, wie die Bürmannische Auflösung mit den dort (am Ende von §. 13) angeführten Burckhardtischen und Hindenburgischen und der, denselben Zweck mit ihr verfolgenden, Töpferischen, zusammenhänge, und eine auf die andere sich reduciren lasse?

I. Burckhardt's Verfahren, die zusammengehörigen Zähler und Nenner der successiven Brüche zu finden, steht im Arch. der Mathem. (H. II. S. 174 — 178) und bezieht sich auf den continuirlichen Bruch

$$\frac{1}{2+}\ \frac{3}{4+}\ \frac{5}{6+}\ \frac{7}{8+}\ \frac{9}{10+}\ \frac{11}{12+}\cdots$$

wo alle Lokalzeichen der Zähler durch ungerade Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, 11 . . . ; alle Lokalzeichen der Nenner durch gerade Zahlen, 2, 4, 6, 8, 10, 12 . . . ausgedrückt werden. Beyder Brüche Vergleichung zeigt also, daſs

Burckh.'s	1	3	5	7	9	. . .
Bürm.'s	n'	$n-1'$	$n-2'$	$n-3'$	$n-4,$	. . .

ingleichen

Burckh.'s	2	4	6	8	10	. . .
Bürm.'s	$n-1,$	$n-2,$	$n-3,$	$n-4$	$n-5,$	. . .

mit einander übereinstimmen und für einander gesezt werden können.

exponenten für Permutationen (Zw. S. c. a. A. S. 264) für welche die Cykel in den auf einander folgenden verticalen Colonnen von selbst in die Augen fallen,

Beyspiel. Die Burckhardtische Darstellung des Zählers C (a. a. O. S. 177) in die Bürmannische zu verwandeln, und so eine durch die andere zu prüfen.

Aufl. Die höchste in der Burckhardtischen Darstellung C vorkommende Zahl ist 16. Man muſs also, um bis auf diese Zahl zu kommen, das Bürmannische $n = 8$ setzen. Es beziehen sich also auf einander

Burckh.'s	1	3	5	7	9	11	13	15
Bürm.'s	8'	7'	6'	5'	4'	3'	2'	1'

ingleichen

Burckh.'s	2	4	6	8	10	12	14	16
Bürm.'s	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1,	0,

wo man also statt der Burckhardtischen Lokalzeichen im dortigen Zähler C, nur die zugehörigen Bürmannischen setzen darf. Eben so verführe man für den Nenner B (a. a. O. S. 176).

Dieselbe Burckhardtische Darstellung C gilt auch für den Zähler des unmittelbar vorhergehenden Bruchs (den lezten von Bürmann (*Dév. gén.* §. 13.) dargestellten *Numérateur*); und so gäbe auch B den zulezt dort dargestellten *Denominateur*. Nur müſste man dafür bey Bürmann $n = 7$ (wie vorher $n = 8$) setzen, die lezte verticale Columne in der Burckhardtischen Darstellung C (für den Zähler) wo 16 darinn vorkommt, abschneiden, und nur diejenigen Complexionen linker Hand des Abschneidestrichs (mit Übergehung der übrigen) beybehalten, von denen 16 ist abgeschnitten worden. Man vergleiche die Darstellung (a. a. O. S. 188). Auf eine ähnliche Art verfährt man mit dem Nenner B, um den Bürmannischen lezten *Denominateur* daraus abzuleiten. Der Beweis für die Burckhardtische Darstellung für Zähler und Nenner ist im Archiv nicht angegeben; man findet ihn aber in der Burckhardtischen Schrift: *Methodus combinatorio-analytica, euoluendis fractionum continuarum valoribus maxime idonea. Lipsiae* 1794.

Anmerk. 1. In den Burckhardtischen Complexionen kommen ungerade und gerade Lokalzeichen unter einander gemengt vor. Nicht so bey Bürmann, welcher Zahlen mit dem Striche oben, und Zahlen mit dem Striche unten, jede Art von einander gesondert, neben einander stellt. Dieses zu erhalten, darf man nur bey Burckhardt die geraden Zahlen nach der Ordnung gelesen, neben einander, und die ungeraden

Zahlen, gleichfalls nach der Ordnung gelesen, neben einander und hintereinander schreiben.

Anmk. 2. Die so geordneten Complexionen, von unten herauf gelesen, stimmen mit den Bürmannischen, von oben herunter gelesen, vollkommen überein. Man vergleiche die Darstellung (a. a. O. S. 188).

II. Hindenburgs Verfahren für solche Brüche kommt an mehreren Orten des Archivs vor. Hier will ich unter andern die Darstellung (Heft III, S. 334) von Zähler und Nenner anführen, die sich auf den Bruch (S. 331)

$$\frac{a}{\alpha +} \quad \frac{b}{\beta +} \quad \frac{c}{\gamma +} \quad \frac{d}{\delta +} \quad \frac{e}{\varepsilon +} \ldots$$

bezieht, den ich $= z$ setzen, und jeden unbestimmten *n*ten Werth von ihm *zvn* (*z valor ntus*) nennen und ausdrücken will. Hier stimmen also

Hindb.'s.	a	b	c	d	$e \ldots$
Bürm's.	n'	$n-1'$	$n-2'$	$n-3'$	$n-4 \ldots$

ingleichen

Hindb.'s	α	β	γ	δ	$\varepsilon \ldots$
Bürm.'s	$n-1,$	$n-2,$	$n-3,$	$n-4,$	$n-5, \ldots$

mit einander überein.

Beyspiel. Aus $z v 5$, dem 5ten Werthe des Bruches z, nach der Hindenburgischen Darstellung (a. a. O. S. 334) die Bürmannische abzuleiten.

Aufl. Man setze das Bürmannische $n = 5$, so beziehen sich auf einander

H—s.	a	b	c	d	e	α	β	γ	δ	ε
B—s.	$5'$	$4'$	$3'$	$2'$	$1'$	$4,$	$3,$	$2,$	$1,$	$0,$

und man findet, die Bürmannischen Zeichen statt der Hindenburgischen in die beyden Involutionen (S. 334) für Zähler und Nenner gesezt, mit Beobachtung dessen, was in den beyden vorhergehenden Anmerkungen (S. 161, 162) angeführt worden ist, den Bruch:

$$zv5 = \frac{\begin{array}{lll} 3210{,}5' + & 32{,}51' + & 531' \\ & 30{,}52' & \\ & 10{,}53' & \end{array}}{\begin{array}{lll} 43210{,} + & 432{,}1' + & 4{,}31' \\ & 430{,}2' & 2\,41' \\ & 410{,}3' & 0{,}42' \\ & 210{,}4 & \end{array}}$$

wie bey Bürmann (*Dév. gén.* §. 13)

Anmerk. 1. Der Umstand, daſs, nach Bürmann, alle Lokalzeichen einer Art (mit dem Strich oben oder unten) neben einander, und die von der andern Art (mit dem Striche unten oder oben) auch nebeneinander und (wenn in einer Complexion, wie gewöhnlich, beyderley Arten vorkommen) hintereinander gesezt werden müssen, macht die am Ende (*Dév. gén.* §. 13) gegebenen Regeln dafür etwas weitläuftig (*régles longues à énoncer et difficiles à retenir*) welches natürlicherweise nicht anders seyn kann.

Anmk. 2. Magister Töpfer hat sich denselben Zweck vorgesezt: „eine Auflösung zu geben, welche alle Lokalzeichen einer Art neben einander producirt“. Sie ist wegen den dabey angebrachten combinatorischen Verfahren merkwürdig. Hier kann nur soviel davon angeführt werden, als die Vergleichung der Töpferischen Zeichen mit den Bürmannischen erfordert.

III. Töpfers Auflösung steht im Archiv der Mathem. (H. II. S. 178 — 182). Es sind dabey drey Fälle unterschieden; der dritte (hierher gehörige) allgemeine Fall; wo die Zähler und Nenner alles seyn können, bezieht sich auf den Bruch (a. a. O. S. 181).

$$z = \frac{\mathfrak{a}}{a+}\;\frac{\alpha}{b+}\;\frac{\beta}{c+}\;\frac{\gamma}{d+}\;\frac{\delta}{e+}\;\frac{\varepsilon}{f+ \ldots}$$

oder, wenn man die dort im Zeiger angegebenen Lokalzeichen braucht, auf

$$z = \frac{\mathfrak{a}}{1+}\;\frac{1}{2+}\;\frac{2}{3+}\;\frac{3}{4+}\;\frac{4}{5+}\;\frac{5}{6+ \ldots}$$

wo in den Zählern, $\mathfrak{a}$ und lauter Cursivzahlen von *1* an nach der Ordnung; in den Nennern, lauter gewöhnlich geradstehende Zahlen von 1 an, als Lokelzeichen vorkommen. Nur der erste Zähler $\mathfrak{a}$ ist anders gezeichnet, weil er das Besondere hat, als *Factor communis* in der Auflösungsformel für zvn aufzutreten.

Nach dem lezten Bruche stimmen also

Töpfer's:	$\mathfrak{a}$	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	...
Bürm's:	n'	$n-1'$	$n-2'$	$n-3'$	$n-4'$	$n-5'$	...

ingleichen

Töpfers	1	2	3	4	5	6	...
Bürm's	$n-1$,	$n-2$,	$n-3$,	$n-4$,	$n-5$,	$n-6$,	...

mit einander überein.

1\. Beyspiel. Aus $zv6$, dem sechsten Werthe des Bruches z nach der Töpferischen Darstellung, die Bürmannsiche abzuleiten.

Die Töpferische Auflösung (a. O. S. 182) giebt;

$$zv6 = \frac{\mathfrak{a}.\begin{pmatrix} 23456 + 234.\mathit{5} + 2.\mathit{35} \\ 236.\mathit{4} \quad 4.\mathit{25} \\ 256.\mathit{3} \quad 6.\mathit{24} \\ 456.\mathit{2} \end{pmatrix}}{\begin{matrix} 123456 + 1234.\mathit{5} + 12.\mathit{35} + \mathit{135} \\ 1236.\mathit{4} \quad 14.\mathit{25} \\ 1256.\mathit{3} \quad 16.\mathit{24} \\ 1456.\mathit{2} \quad 34.\mathit{15} \\ 3456.\mathit{1} \quad 36.\mathit{14} \\ 56.\mathit{13} \end{matrix}}$$

wo ich die Complexionen im Zähler und im Nenner, die bey TÖPFERN in zwey ganzen Colonnen neben einander stehen, so in gebrochenen Colonnen unter einander gesetzt habe, wie es die Ordnung der Bürmannischen Complexionen erfordert

Diese zu finden, darf man nur $n = 6$, und statt

T—s: a 1 2 3 4 5 . . .

B—s; 6′ 5′ 4′ 3′ 2′ 1′ . . .

ingleichen, statt

T—s: 1 2 3 4 5 6 . . .

B—s: 5, 4, 3, 2, 1, 0, . . .

setzen. Man vergleiche den Bürmannischen Bruch für $zv6$ im Schema (S. 46)

2. Beispiel. Aus dem Bruche für $zv6$ nach Töpfer, den nächst vorhergehenden $zv5$ herzuleiten.

Aufl. In dem obigen Bruche für $zv6$ übergehe man alle Complexionen; darinn 6 nicht vorkommt; bey denen, worinn 6 vorkommt, werfe man die 6 weg) was übrig bleibt, giebt die Complexionen für

$$zv5 = -\frac{\cdot\left[\begin{array}{l} 2345 + 23\cdot 4 + 24 \\ \qquad\;\; 25\cdot 3 \\ \qquad\;\; 45\cdot 2 \end{array}\right]}{\begin{array}{lll} 12345 + & 123\cdot 4 + & 1\cdot 24 \\ & 125\cdot 3 & 3\cdot 14 \\ & 145\cdot 2 & 5\cdot 13 \\ & 345\cdot 1 & \end{array}}$$

Sezt man hier für

T—s	a	1	2	3	4	‖	1	2	3	4	5
B—s	5′	4′	3′	2′	1′	‖	4,	3,	2,	1,	0,

so kommen die Bürmannischen Complexionen für $zv5$ (wie S. 46)

Diese so leichte Umsetzung eines Werthes in den andern, ohne alle Substitution und Reduction, zeigt schon den grossen Nuzzen combinatorischer Anordnungen, der noch mehr einleuchtet, wenn man sieht, dafs die Töpferische Darstellung der Zähler und Nenner sich sogar, was man kaum erwartet hätte, auf Involutionen bringen lasse (Arch. der Math. H. II. S. 189)

Obschon TÖPFER und BÜRMANN sich bey Behandlung der continuirlichen Brüche einerley Zweck vorgesezt hatten (S. 163) so sind doch die Regeln, die sie für die Anordnung der Complexionen vorschreiben, ganz verschieden. Eben so sind HINDENBURG und BURCKHARDT, in Ansehung der Ableitung folgender Werthe aus den vorhergehenden, von denselben Substitutionen (Arch. d. Math. S. 174) ausgegangen, sind aber gar bald auf von einander ganz verschiedene Wege gerathen. Eine neue Bestätigung der Mannichfaltigkeit combinatorischer Verwickelungen und Gesetze für dieselben Gegenstände!

Möchte das Wenige, was ich auf Veranlassung des vortrefflichen Bürmannischen *Développement général* von combinatorischen Anordnungen und Involutionen, und von ihrer Anwendung auf Summirung der Folgebrüche hier beygebracht habe, diejenigen Analysten, welche diese so wirksamen und vielvermögenden Hülfsmittel und ihren Gebrauch in der Analysis noch nicht genüglich kennen, vermögen, meine ausführlichern Abhandlungen darüber im ersten Bande des mathematischen Archivs einzusehen! Die hier vorkommenden Involutionen gehören zu den einfachsten, und lassen sich in sehr mannichfaltige Gestalten umwandeln. Am besten ist es, den Anfang combinatorisch-analytischer Untersuchungen von den continuirlichen Brüchen zu machen, und von da erst auf das allgemeine Productenproblem, den Polynomischen Lehrsatz u. s. w. auf die Evolution anderer Functionen und Sätze fortzugehen. Die gedachten Abhandlungen enthalten eine Menge allgemeinnützlicher Bemerkungen, die nicht blos auf diese Brüche eingeschränkt sind, und ich glaube, durch mehrere Beyspiele, aus Erfahrung fest davon überzeugt, mit Wahrheit versichern zu dürfen, daſs Niemanden das aufmerksame Lesen derselben, und das dadurch veranlaſste Nachdenken darüber, gereuen wird.

V.

DER DERIVATIONS-CALCUL UND DIE COMBINATORISCHE ANALYSIS IN BEZIEHUNG AUF EINANDER

VON

CARL FRIEDRICH HINDENBURG.

ERSTER ABSCHNITT.

Analytische Derivationen und ihre Verschiedenheit. TAYLOR's Theorem, als Grundlage der Theorie der Functionen und deren Entwickelung in Reihen. ARBOGAST's Derivationen und hevristische Fictionen.

1. Der Begriff von Derivation ist einer der ausgedehntesten und fruchtbarsten in der Analysis. Man kann zusammengehörige Grössen oder Functionen als von einander abgeleitet betrachten; es sey nun, dafs ein zwischen ihnen bestehendes, allen gemeinschaftliches, Gesetz der Ableitung wirklich dabey zum Grunde liegt, oder dafs sie, bey aller Unabhängigkeit an sich, gleichwohl durch gewisse Operationen so mit einander verbunden sind, dafs es möglich wird,

von einer auf die andere überzugehen, und so eine Grösse oder Function aus der andern zu deriviren. Ich will jene, Derivationen der ersten; diese, Derivationen der zweyten Art nennen. Das Derivationsgesetz, auf welches hierbey alles ankommt, wird sich im ersten Falle aus dem bestimmten Verhalten der Grössen unter einander selbst, im zweyten Falle aus der Art der Verbindung herleiten lassen, welche die Grössen bey ihrer Zusammensetzung befolgen. Vorzüglich wichtig zeigen sich beyderley Derivationen bey Evolutionen der Functionen in Reihen, bey Transformationen der Funcrionen oder Reihen in gegebene Gestalten, bey Umkehrung und Interpolation der Reihen, bey Summirung der continuirlichen Brüche, u. s. w.

2. Lagrange und Arbogast haben in dem Fache der analytischen Derivationen viel geleistet. Jener hat die *théorie des fonctions et équations derivées* zuerst recht ins Licht gestellt, und ein neues sehr fruchtbares *Système d'opérations algébriques* daraus abgeleitet; dieser hat den Begriff von Derivation weiter verfolgt, und einen *Calcul des Dérivations* vornehmlich zum Gebrauch für Derivationen der zweyten Art neuerlich herausgegeben.[a])

3. Es sey fx eine Function der variabeln Grösse x.

I. Aus der Theorie der Reihen ist bekannt, wenn x in $x+v$ (x und v sind beyde undeterminirte Grössen) also fx in $f(x+v)$ sich verwandelt, dafs

$$f(x+v) = fx + pv + qv^2 + rv^3 + \text{etc.}$$

[a]) *Du Calcul des Dérivations*; par *L. F. A. Arbogast. Strasbourg, An VIII* (1800).

oder, dafs $f(x+v)$ in einer nach v geordneten Reihe sich darstellen läfst, in welcher $p, q, r \ldots$ (die Coefficienten der Potenzen von v) gleichfalls Functionen von x sind.

II. Diese Functionen sind keineswegès von v abhängig, lassen sich aber, jede folgende aus der vorhergehenden, und so sämmtlich aus der ursprünglich gegebenen (primitiven) Function fx deriviren. LAGRANGE[b]) hat daher, bey der weitern Entwickelung von $f(x+v)$, wo diese Derivationen aus führlich nachgewiesen werden, sehr schicklich

$$f(x+v) = fx + \frac{f'x}{1} v^1 + \frac{f''x}{1.2} v^2 + \frac{f'''x}{1.2.3} v^3 + \text{etc.}$$

gesezt. Nämlich, $f'x$ ist hier die erste derivirte Function von fx, und $f''x$ die erste derivirte von $f'x$, und $f'''x$ von $f''x$, u. s. w.; sämmtliche Functionen aber befolgen ein gemeinschaftliches Derivationsgesetz, das man kennt, sobald man weis, wie $f'x$ aus fx, die erste derivirte Function aus der primitiven, sich ableiten läfst. Diese Bezeichnung ist eben so bequem, als die Folgen solcher Ableitungen wichtig sind.[c])

b) *Théorie des fonctions analytiques p. 14.*

c) *La Dérivation successive des fonctions $f'x$, $f''x$, $f'''x$ etc. qui se déduisent de la fonction proposée fx — doit être regardée comme une nouvelle branche de l'Analyse, et elle offre ces deux questions générales;*

1) *Descendre de la fonction génératrice aux fonctions dérivées.*

2) *Remonter de l'une quelconque des fonctions derivées, à la fonction génératrice; la première est l'objet du Calcul Differentiel, et la seconde appartient au Calcul Intégral.* LACROIX *Traité du Calcul différentiel p. 94.*

III. Sehr anschaulich ist dieses Gesetz in folgendem analytischen Ausdrucke enthalten:

$$f(x+v) = fx + \frac{dfx}{1\,dx}v + \frac{d^2fx}{1.2\,dx^2}v^2 + \frac{d^3fx}{1.2.3\,dx^3}v^3 + \text{etc.}$$

wo also, für unveränderliche dx, die successiven Differentiale,

$$\frac{dfx}{dx} = f'x;\ \frac{df'x}{dx} = f''x = \frac{d^2fx}{dx^2};\ \frac{df''x}{dx} = f'''x = \frac{d^3fx}{dx^3};$$

u. s. w. ein leichtes Gesetz für Derivationen der ersten Art darstellen.

Für $fx = y;\ f(x+v) = Y$, wäre $f(x+v)$ oder

$$Y = y + \frac{dy}{1dx}v + \frac{d^2y}{1.2\,dx^2}v^2 + \frac{d^3y}{1.2\,3\,dx^3}v^3 + \text{etc.}$$

Diese Formeln stellen Taylo'rs bekanntes Theorem [d]) dar, in der Form, in welcher es gewöhnlich angegeben wird.

IV. Man kann diese Formel etwas abändern und ihr eine für die Entwickelung der Functionen in Reihen bequemere Einrichtung geben [e]). Weil nämlich die veränderliche Grösse x in fx, oder y, alle Werthe annehmen, und man für v auch eine veränderliche Grösse setzen darf (*Eul. Inst. Calc. Diff. II.* §. 66), so kann man erst $x = 0$ und dann $v = x$ setzen, und die Function $f(x+v)$ und ihren Werth darnach abändern.

Für $x = 0$ verwandelt sich $f(x+v)$ in

$$fv = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{v}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{v^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{v^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

d) Von Taylor's Satze, seinen verschiednen Formen und Anwendungen, habe ich (Archiv der Math. H. II. S. 201—219) ausführlich gehandelt.

e) Arch. der Math. a. a. O. S. 210, 211.

wo man die (y), $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ u. s. w. so nehmen muſs, wie es die Voraussetzung von $x = 0$ erfordert. Man darf nämlich nur

für die klammerirten	$(y), \left(\frac{dy}{dx}\right), \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right), \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \ldots$
die reducirten Werthe von	$y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots$

setzen, welche kommen, wenn man in y (der Function von x) und in dem was man daraus durch fortgesetztes Differenziiren findet, nach geschehener Differenziation; $x = 0$ sezt. Sezt man zulezt x für v, so erhält man y oder

$$fx = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{x}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)\frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

wo die Klammern dieselbe Nachweisung geben, wie vorhin.

V, Weil die (y), $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ nichts von x enthalten (IV) so kann man dafür auch A, B, C, D . . . , folglich fx oder

$$y = A + Bx + \frac{C}{1.2}x^2 + \frac{D}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

setzen, wobey man, wie eben itzt gezeigt worden, berechtiget ist anzunehmen, daſs A durch (y) gegeben sey, und daſs B von A, und C von B, und D von C, u. s. w. sämmtlich nach einem und demselben Gesetze deriviren, und Derivationen der ersten Art darstellen.

So setzt auch Professor ARBOGAST [f]) in der entwikkelten Function $F(\alpha + x) = a + bx + \frac{c}{1.2}x^2 + \text{etc.}$

f) *Calcul des Dérivations.* §. *I. no.* 1.

die Abhängigkeit der a, b, c, d ... von $F\alpha$, a, b, c ..., als bekannt voraus. Da der Satz dem ganzen Gebäude zum Grunde liegt, so wird man die kurze derivative Deduction desselben hier nicht überflüssig finden.

4. Das Theorem (3, V) sezt voraus, dafs die Function y, auf die man es anwenden will, in eine Reihe wie $a + bx + cx^2 + dx^3 +$ etc., wo die Exponenten von x in einer arithmetischen Progression fortgehen, sich mufs können entwickeln lassen. Da der Umfang solcher Functionen sehr grofs ist, so erhellet daraus zugleich die Wichtigkeit des Satzes. Die Entwickelung von $\varphi(\alpha + z)$, der Function eines Binomiums, hat also keine Schwierigkeit. Anders verhält es sich, wenn man die Evolution von $\varphi(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 +$ etc.), der Function einer polynomischen Grösse, versucht; wo die Glieder der Potenzen eines Polynomiums (für welche die bekannte recurrirende Formel [hier, Note g] in unübersehliche Weitläuftigkeiten führt) sich nicht leicht übersehen lassen. Die combinatorische Analysis hat diese Schwierigkeit zuerst gründlich gehoben.

5. Als Beyspiele zu unmittelbarer Vergleichung mögen die Evolutionen der beyden Functionen (Arch. der Math. H. II. S. 211, 212) mit den dortigen beyden Anmerkungen (S. 212 — 214) dienen.

Bey der Entwickelung nämlich von

$$(a + x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} x^2 + \text{etc.}$$

zeigt sich in den Gliedern der Reihe, ausser dem regelmäfsigen Fortschreiten der Binomialcefficienten, auch eine sehr regelmäfsige Verbindung der Potenzen von a mit denen von x; jedes folgende Glied ist ein derivirtes der ersten Art aus dem nächstvorherge-

henden, wobey das allen gemeinschaftliche Derivationsgesetz ganz offen vor Augen liegt; das auch die bekannte Formel

$$(a+x)^m = a^m + \frac{m}{1} A \frac{x}{a} + \frac{m-1}{2} B \frac{x}{a} + \frac{m-2}{3} C \frac{x}{a} + \text{etc.}$$

nachweist, wo jeder grosse Buchstabe das nächs-vorhergehende ganze Glied bedeutet.

Bey Entwickelung hingegen von

$$(a+bx+cx^2+\text{etc.})^m = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

wo $A = a^m$

$B = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} b$

$C = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} c + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2} b^2$

$D = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} d + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2}.\, 2bc + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3} b^3$

$E = {}^m\mathfrak{A}\, a^{m-1} e + {}^m\mathfrak{B}\, a^{m-2} (2bd + c^2) + {}^m\mathfrak{C}\, a^{m-3}.\, 3b^2 c$

$\qquad {}^m\mathfrak{D}\, a^{m-4}.\, b^4$

(mehrere Coefficienten, bis mit *I*, stehen in der ersten Samml. c. a. Abh. S. 70).

Bey diesen Entwikkelungen folgen zwar die Binomialcoefficienten ${}^m\mathfrak{A}$, ${}^m\mathfrak{B}$, ${}^m\mathfrak{C}$, ${}^m\mathfrak{D}$. . . in den einzelnen *A*, *B*, *C*, *D*, *E* . . . wiederum sehr regelmässig auf einander, aber dagegen wächst die Verwickelung der *a*, *b*, *c*, *d*, *e* . . . immer mehr und mehr, je weiter man die Function evolvirt. Dabey ist folgendes klar: 1) die *a*, *b*, *c*, *d* . . . verwickeln sich in den *A*, *B*, *C*, *D* . . . nur nach und nach; *A* ist eine Function von *a*; *B* von *a*, *b*; *C* von *a*, *b*, *c*; *D* von *a*, *b*, *c*, *d*; u. s. w. bey den folgenden Coefficienten. 2) Von jedem dieser Coefficienten ist das erste Glied bestimmt gegeben. Beydes kann man als eine Weisung ansehen, die Zusammensetzung der *a*, *b*, *c*, *d* . . . (in 1 oder 2) genauer zu erforschen und zu sehen, ob und wie, die Coefficienten (in 1) oder die einzelnen Glieder derselben (in 2) als Derivationen der zweiten Art sich

von einander ableiten lassen g). Diese Untersuchung hat mich, wie bekannt, auf combinatorische Anordnungen geleitet; Prof. Arbogast hat sich neuerlich den Weg dazu durch seinen Derivationscalcul gebahnt.

6. Über die Schwierigkeit der Entwickelung von $\varphi(a + bx + cx^2 + \text{etc.})$ dahin das zweyte Beyspiel (in 5) gehört, hat man schon öfter und vorlängst geklagt, und solche auf mehrern, (in meinen *Infin. Dign.* (§. *XIII* — *XIX*) zum Theil angegebenen) Wegen, aber immer nicht befriedigend, zu heben gesucht. Herr Prof. Arbogast drückt sich (*Préf. p. II*) darüber folgendergestalt aus: „Da der Differenzialcalcul mit so grosser Leichtigkeit die Reihenentwickelung der Functionen von Binomien giebt, so ist es natürlich, eine Methode zu wünschen, nach welcher die Entwickelung mit gleicher Leichtigkeit auf Functionen der Polynomien von unbestimmter Anzahl von Gliedern, sich erstrecken lasse" — Dies habe ihn, sezt er hinzu, auf ein allgemeines Evolutionsverfahren durch Derivationen geleitet. Arbogast ist also, wie man hier sieht, von demselben Bedürfnisse ausgegangen, das auch mich in Thätigkeit

g) Jedoch so, dafs die $A, B, C, D \ldots$ unmittelbar durch $a, b, c, d \ldots$ bestimmt und ausgedrückt werden. Denn sonst stellen die recurrirenden Formen, wie hier in diesem Falle die Werthe von

$$A = a^m;\; B = \frac{mAb}{a};\; C = \frac{(m-1)Bb + 2mAc}{2a};$$

$$D = \frac{(m-2)Cb + (2m-1)Bc + 3mAd}{3a};$$

$$E = \frac{(m-3)Db + (2m-2)Cc + (3m-1)Bd + 4mAe}{4a}$$

gesezt hat.[h]) Wir haben beyde den Binomialsatz, ich den Newtonischen, ARBOGAST den Taylorischen, zum Grund gelegt; und die Folge wird zeigen, dafs wir nicht sowohl in den Mitteln selbst, als in der Art sie aufzufinden und anzuwenden, von einander abweichen. Meine combinatorischen Deductionen und Invo-

etc. (*Eul. Instit. Calc. Diff. P. II. s.* 202) ebenfalls Derivationen dar, die auch leichte Gesetze befolgen, aber beschwerliche Substitutionen und Reductionen veranlassen; um so mehr, je weiter man bey ihnen vorwärts recurriren mufs, um alles in den gegebenen *a, b. c, d* . . . auszudrücken. Von solchen Derivationen, die man recurrirende nennen könnte, ist hier die Rede nicht. Die Combinationslehre, und so auch der Derivationscalcul, geben Mittel an die Hand, aus einem der beyderley Ausdrücke in den andern überzugehen. Eine vergleichende Darstellung Beyder, für den obigen Fall, in combinatorischen Zeichen ausgedrückt, (Erst. Samml. c. a. A. S. 291) Eine andere Darstellung eines verwandten Falls (Zw. Samml. c. a. A. S. 49) und meine dortigen Bemerkungen (S. 48 — 52) über gemeine oder gewöhnliche und combinatorisch-involutorische Recurrenzen. Häufige Beyspiele eines solchen Übergangs aus den directen independenten Formen in die recurrirenden, bey ARBOGAST (*n.* 13, 15, 17, 18, 71 etc.)

h) *Propositum erat primo loco, cum vidissem, Theorema Binomiale a Viris doctis excultum esse sic, vt, quod posset ad vlteriorem perfectionem accedere, nihil superesset, propositum, inquam, erat, Theoremati Infinitinomiali, quod pluribus etiamnum premi comperceram, difficultatibus, eandem operam nauare; si forte possem rem eo deducere, vt, pro rei nimirum ipsius modo atque natura, pari facilitate queant, ac fit in Binomio, Infinitinomii etiam Dignitatum singula membra exhiberi* (*Infin. Dign. Praef. p.* VII) — *In quo mirum in modum me adiuuit, a* LEIBNITIO *et Jac.* BERNOULLIO *iam obseruatus Potestatum Multinomiorum συμβολισμὸσ cum rerum quotlibet datarum Complexionibus et Variationibus* — *Terminorum autem quaerendorum reperi pendere inuentionem a Problemate combinatorio, cuius, propter summum in re Combinatoria et Analysi vsum, paulo vberiorem institui tractationem* (*Ibid p.* XI.)

lutionen sind, wie aus dem ersten Anhange zu dieser Abhandlung mit mehreren erhellen wird, im eigentlichen Sinne und Verstande des Worts — wahre Derivationen, die, wie die Arbogastischen, auf einen bestimmten Anfang (*origine*), von dem sie ausgehen, sich beziehen, Zum Unterschiede kann man die meinigen combinatorische, die Arbogastischen, analytische Derivationen nennen. Ich sage zum Unterschiede, nicht im Gegensatze; denn meine Derivationen sind, wie man finden wird, ebenfalls analytisch.

7. Den Ursprung meiner combinatorischen und involutorischen Anordnungen (die Veranlassung dazu) habe ich (in 5) angegeben. Arbogast hat alles auf erweiterte Begriffe von Derivationen gegründet. Ihn haben die Derivationen der ersten Art auf Derivationen der zweyten geleitet, und ihm Veranlassung gegeben, aus dem bekannten Verfahren bey jenen, ein ähnliches für diese herzuleiten, und einen Algorithmen dafür aufzusuchen. Der Erfolg davon ist eine erweiterte Anwendung des Differentialcalculs gewesen. Dies allein kann schon hinreichend seyn, sich einen Begriff von dem Umfange der Methode [i]) im Voraus zu machen,

i) Erstreckt hat die Methode ihr Urheber vorizt: auf die Entwickelung von Functionen einfacher und zusammengesezter Polynomien, bey denen nehmlich die Glieder nach den Potenzen eines einzigen Buchstabens, oder nach den Potenzen und Producten von zwey oder drey Buchstaben geordnet sind, und die man daher einfache, doppelte, dreyfache Reihen oder Polynomien nennen kann: auf die Substitution der Reihen in Reihen; auf das allgemeine Glied der recurrirenden (einfachen und doppelten) Reihen; auf die allgemeine Umkehrung der Functionen und Reihen: auf den Differenzialcalcul, verwickelte Operationen zu erleichtern, und auf mehrere andere Gegenstände der

die zugleich mit der Theorie der Functionen, von welcher sie einen besondern Zweig ausmacht, in der engsten und innigsten Verbindung steht; ein Umstand, der recht dazu geeignet ist, sie den Analysten empfehlungswerth zu machen-k) Das Werk ist übrigens mit der lichtvollstem Deutlichkeit abgefaſst, und enthält zahlreiche Spureu grosser Belesenheit, wo der Verfasser im Verfolg seines Ganges auf Sätze stöſst, die schon von

Theorie der Functionen: auf allgemeine Lehrsätze der directen und umgekehrten Methode der Differenzen, und weitere Anwendung auf Zerlegung in Factoren, Summirung, Transformation, Interpolation der Reihen. Vornehmlich wichtig ist immer die Evolution der Functionen in Reihen. Sie macht gleichsam die Grundlage des ganzen Werks aus; die Entstehung (der Ursprung) und Anwendung der Derivationen zeigt sich hier am deutlichsten; einzelne Sätze davon finden daher durchgängig ihre Anwendung, und kommen in der Folge häufig vor. An ihr kann man auch am besten die wesentliche Verschiedenheit beyder Methoden (der combinatorischen und derivativen) nachweisen; wie die Folge mit mehrerm zeigen wird.

k) Der Analyst befindet sich hier, gleich beym Eintritte, auf einem ihm vorlängst bekannten Boden (des Differenziirens) und auf diesem Wege eröfnen sich ihm allmälig, bey weitern Fortschritten, neue An- und Aussichten. Bey einem flüchtigen Überblikke scheint es, man habe nur wenige Zeichen ins Gedächtniſs zu fassen. Der Grundzeichen sind freylich nur wenige; aber sie werden, durch Striche, Puncte, Commata, Zahlen und Buchstaben, oberwärts und niederwärts zur Seite, so mannichfaltig modificirt, und erhalten dadurch so vielfache Unterschiede, daſs man sie wohl für eben so viel einzelne besondere Zeichen ansehen kann. Um so nothwendiger und nützlicher ist ihre Zusammenstellung und die Nachweisung ihrer Bedeutung, die in einer besondern Tafel, gleich am Ende der Vorrede, angegeben worden ist.

LAGRANGE und LAPLACE auf andern, zum Theil ähnlichen, Wegen sind aufgefunden worden. [1])

Die grosse Deutlichkeit des Werks beruhet: auf der sehr faſslichen, zum Theil ausführlichen, Darstellung und Auseinandersetznng der ersten Gründe und der daraus abgeleiteten Vorschriften und Verfahren; auf der sehr zweckmässigen Ordnung und Stellung der Sätze; vornehmlich auf der genau bestimmten Angabe und Abfassung der vorzüglichsten Aufgaben und Lehrsätze [als Exempel will ich hier die in der Folge vorkommende Aufgabe (in 20) anführen] mit Beyfügung der zugehörigen Auflösungen, Beweise und erläuternden Beyspiele; auf den gut gewählten Abschnitten endlich und Rubriken, die als bequeme Ruheplätze und weitere Nachweisungen dienen. Dieser gemischte, synthetisch- analytische Vortrag, ist freylich nicht so kurz als der ganz analytische, hat aber seine eigenen Vorzüge, die wohl erwogen zu werden verdienen, zumal da der Verfasser nicht blos für vollendete Analysten geschrieben hat.

8. Der Derivationscalcul gründet sich auf die allgemeine Vorstellung, daſs man Grössen als von einander abgeleitet betrachten kann. Hierher gehören (und das ist der gewöhnliche Fall) diejenigen Grössen oder Functionen, die eine solche Abhängigkeit von einander haben, daſs eine aus der andern, durch ein gleichförmiges Verfahren (wie bey den successiven Differenzialen) sich deriviren läſst. Man kann aber, mit ARBOGAST, den Begriff von Derivation erweitern, und

[1]) *En rapprochant plusieurs théories importantes et des solutions fondées sur des principes et des méthodes diverses, j'ai été surtout jaloux, pour mieux faire sentir l'utilité du calcul des dérivations, d'attacher à ce calcul plusieurs des plus elegantes formules dues à la sagacité des grands Geomètres,* LAGRANGE *et* LAPLACE. *Calc. des Dér. Préf. p. XI.*

durch eine hevristische Fiction, auf jede willkühr-liche, von einander ganz unabhängige Grössen *a*, *b*, *c*, *d* . . . und ihre Zusammensetzung in Functionen, erstrecken, und solche als veränderlich und von einander abhängig (derivirend) ansehen, wenn sich aus der Verbindung, in welche sie durch die sie betreffenden Operationen gebracht worden, ein Weg angeben läſst, auf welchem man von einer Grösse oder Function auf die andere übergehen kann; wobey also, weniger die Grössen selbst, als ihre Operationen, in Betrachtung kommen.[m])

Ich werde hier und in der Folge nur einige der wichtigsten Derivationsformeln und ihren Gebrauch bey Entwickelung der Functionen von Polynomien in Reihen aufführen, um solche nachher mit den combinatorischen Evolutionsformeln und ihrer Anwendung zu vergleichen. Die Ableitung und Rechtfertigung jener Formeln (wo selbst die Coefficienten *a*, *b*, *c*... α, β, γ . . . *A*, *B*, *C* . . . der Glieder der Polynomien durch eine doppelte Fiction als veränderlich und von einander derivirend betrachtet werden, selbst dann, wenn sie gänzlich von einander unabhängig sind, [ARB. p. 6, 4 und p. 20. 21] welcher Voraussetzung am Ende durch eine schickliche Substitution Genüge geleistet wird [Ebend. no. 6] muſs man im Buche selbst nachsehen, wo man alles deutlich und ausführlich aus einander gesezt finden wird. Die in der Folge vorkommenden Citate, theils aus der gegenwärtigen Abhandlung, theils aus dem Arbogastischen Werke, kurz und auszeichnend zu unterscheiden, sollen die Zahlen der Abschnit-

m) *Les dérivées que je considère sont moins des dérivées de quantités que de dérivées d'opérations, comme l'Algèbre est moins un calcul de quantités que d'opérations, arithmétiques ou géométriques, à exécuter sur les quantités. Calc. des Dér. Préf. p. I.*]

te oder Seiten der erstern, immer in runde (); die Numern und Zahlen der Seiten von leztern hingegen, in eckigte [] Klammern eingeschlossen werden. Auch sollen meine häufig angeführten, erste und zweyte Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen forthin blos durch Sml. I und Sml. II bezeichnet werden.

10. Der Anfang wird mit dem Satze gemacht

$$F(\alpha + x) = a + bx + \frac{c}{1.2} x^2 + \frac{d}{1.2.3} x^3 + \text{etc.}$$

wo aus der Theorie der Functionen bekannt ist (3. V) dafs $a = F\alpha$, dafs b von a oder $F\alpha$, und c von b, und d von c, u. s w. nach einem und demselben Gesetze deriviren, so, dafs wenn man b von a oder $F\alpha$ abzuleiten weifs, man auch c von b, und d von c u. s. w. deriviren kann [no. 1]

11. Das Zeichen der Derivation ist der Buchstabe D, aus dem grössern lateinischen Alphabete der sogenannten Capitälchen. Es ist nöthig die Derivationen und Differentiationen (wofür LEIBNITZ das kleinere d gewählt hat) zu unterscheiden. D drückt also zugleich die Verwandschaft und den Unterschied mit und von d sehr schicklich aus.

12. Zeigt also D die Operation an, die man auf $F\alpha$ anwenden mufs, um b daraus zu deriviren, so ist klar, dafs

$$b = \text{D} F\alpha;\ c = \text{D}\,\text{D} F\alpha = \text{D}^2 F\alpha;\ d = \text{D}^3 F\alpha;\ \text{etc.}$$

Man kann also die vorige Reihe (10) auch so ausdrücken:

$$F(\alpha + x) = F\alpha + \frac{\text{D} F\alpha}{1} x + \frac{\text{D}^2 F\alpha}{1.2} x^2 + \frac{\text{D}^3 F\alpha}{1.2.3.} x^3 + \text{etc.}$$

[no. 2] welche Form mit der des Taylorischen Theorems (3. III) übereinstimmt.

13. Wenn man α als veränderlich betrachtet und differentiirt, so findet man

$$\text{D}\, F\alpha = \frac{d\,F\alpha}{d\,\alpha};\ \text{D}^2\, F\alpha = \frac{d^2\,F\alpha}{d\alpha^2},\ \text{D}^3\, F\alpha = \frac{d^3\,F\alpha}{d\,\alpha^3};\ \text{etc.}$$

wo $d\alpha$ constant und willkührlich ist. Man kann also $d\alpha = 1$ setzen, und diese Voraussezung giebt

$$\text{D}\,F\alpha = dF\alpha;\ \text{D}^2\,F\alpha = d^2\,F\alpha;\ \text{D}^3\,F a = d^3\,F a;\ \text{etc.}$$

und die Regeln der Derivationen sind mit denen der Differeutiationen übereinstimmend [3]. Hier bedeuten D, D^2, D^3, . . . dieselben, aber mehrmals und zwar so oft wiederholten Operationen an, als die Exponenten 1, 2, 3 . . . erfordern.

14. Um $F(\alpha + \beta x)$ zu entwickeln, darf man (in 12) statt x nur βx schreiben. Das giebt, wenn man die β^1, β^2. β^3 . . . von den x^1, x^2, x^3 . . . absondert und neben $F\alpha$ sezt:

$$F(\alpha + \beta x) = F\alpha + \frac{\text{D}\,F\alpha.\beta}{1}x + \frac{\text{D}^2\,F\alpha.\beta^2}{1.\,2}x^2 + \text{etc.}$$

für $\text{D}\alpha = d\alpha = 1$.

Die β^1, β^2, β^3 . . . zugleich mit von den Operationen auf $F\alpha$ abhängig zu machen, nehme man an

$$F(\alpha + \beta x) = F\alpha + \frac{\text{D}.\,F\alpha}{1}x + \frac{\text{D}^2.\,F\alpha}{1.\,2.}x^2 + \text{etc.}$$

Die Vergleichung beyder Reihen giebt sodann die Werthe der Derivationen mit dem Puncte vor $F\alpha$ oder

$$\text{D}\,.F\alpha = \text{D}\,F\alpha.\beta^1;\ \text{D}^2.F\alpha = \text{D}^2\,F\alpha.\beta^2;$$

$$\text{D}^3.F\alpha = \text{D}^3\,F\alpha.\beta^3;\ \text{D}^4.F\alpha = \text{D}^4\,F\alpha.\beta^4;$$

u. s. w. und diese Werthe findet man auch, wenn man auf $\text{D}.F\alpha. = \text{D}.\alpha$ dieselbe Operation, wie auf $F\alpha$, anwendet; und statt $\text{D}.\alpha$ die constante β (also $\text{D}^2.\,\alpha$; $\text{D}^3.\,\alpha$

u. s. w. $= 0$) sezt. Dieses, und die Fortsetzung dieses Verfahrens, giebt

$$\mathrm{D}.\, F\alpha = \mathrm{D}F\alpha.\, \mathrm{D}.\alpha = \mathrm{D}F\alpha.\beta^1,$$
$$\mathrm{D}^2.F\alpha = \mathrm{D}.\,(\mathrm{D}F\alpha.\,\mathrm{D}.\alpha) = \mathrm{D}^2F\alpha(\mathrm{D}.\alpha)^2 = \mathrm{D}^2F\alpha.\beta^2$$
$$\mathrm{D}^3.F\alpha = \mathrm{D}.\,[\mathrm{D}^2F\alpha.(\mathrm{D}.\alpha)^2] = \mathrm{D}^3F\alpha(\mathrm{D}.\alpha)^3 = \mathrm{D}^3F\alpha.\beta^3$$

u. s. w. Dies Verfahren ist also von dem in der Differenzialrechnung gewöhnlichen, nur darinn unterschieden, daſs hier α variabel und statt $\mathrm{D}.\alpha$ der Coefficient gesezt wird, der in dem Binomium $\alpha+\beta x$ zu x gehört [no. 3, 4]

15. Den Übergang aus den Functionen der Binomien in die der Polynomien anlangend, nehme man von jedem Gliede der Reihe (14) die Function φ; dies giebt einestheils,

$$\varphi F(\alpha+\beta x) = \varphi\left(F\alpha + \frac{\mathrm{D}.F\alpha}{1}x + \frac{\mathrm{D}^2.F\alpha}{1.2}x^2 + \text{etc.}\right.$$

anderntheils, φF statt F gesezt,

$$\varphi F(\alpha+\beta x) = \varphi F\alpha + \frac{\mathrm{D}.\varphi F\alpha}{1}x + \frac{\mathrm{D}^2\,\varphi F\alpha}{1.2}x^2 + \text{etc.}$$

Nun sey $F\alpha = a$, $\mathrm{D}.F\alpha = \mathrm{D}.a$, $\mathrm{D}^2.F\alpha = \mathrm{D}^2.a$, u. s. w. so ist

$$\varphi\left(a + \frac{\mathrm{D}.a}{1}x + \frac{\mathrm{D}^2.a}{1.2}x^2 + \frac{\mathrm{D}^3.a}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}\right)$$
$$=$$
$$\varphi a + \frac{\mathrm{D}.\varphi a}{1}x + \frac{\mathrm{D}^2\varphi a}{1.2}x^2 + \frac{\mathrm{D}^3.\varphi a}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

wo also die Entwickelung von $\mathrm{D}.\varphi a$, $\mathrm{D}^2.\varphi a$, $\mathrm{D}^3\varphi a$, ... zu suchen ist. Da hier, wie man sogleich übersieht, die $\mathrm{D}^2.a$. $\mathrm{D}^3.a$, $\mathrm{D}^4.a$, . . . nicht (wie in 14) gleich Null sind, so sind auch die $\mathrm{D}^2.\varphi a$, $\mathrm{D}^3.\varphi a$, . . . nicht mehr den $\mathrm{D}^2\varphi a\,(\mathrm{D}.a)^2$, $\mathrm{D}^3\varphi a\,(\mathrm{D}.a)^3$, . . . gleich, sondern man muſs ihnen die von den variabeln $\mathrm{D}.a$, $\mathrm{D}^2.a$, $\mathrm{D}^3.a$, . . . herrührenden Grössen beyfügen; und

so befolgen hier die Zeichen D und d (11) dieselben Regeln [no. 5.].

16. In der Folge kommen häufig, was ich hier im voraus bemerken will, neben den ganz einfachen *dérivées successives*, nämlich

den $\mathrm{D\,F}a$, $\mathrm{D^2F}a$, $\mathrm{D^3\,F}a$ $\mathrm{D^nF}a$

auch $\mathrm{D.F}a$, $\mathrm{D^2.F}a$, $\mathrm{D^3.F}a$ $\mathrm{D^n.F}a$

oder $\mathrm{D}.\varphi a$, $\mathrm{D^2}.\varphi a$, $\mathrm{D^3}.\varphi a$ $\mathrm{D^n}.\varphi a$

vor: wo also Derivationen mit einem Puncte vor dem Functionalzeichen F oder φ, von denen ohne Punct zu unterscheiden sind. In beyden wird a als variabel betrachtet; aber in dem Falle wo kein Punct vor F oder φ steht, ist die *dérivée* der veränderlichen a, d. i. $\mathrm{D}a$, beständig und $=1$, also $\mathrm{D^2}a = \mathrm{D^3}a = \mathrm{D^4}a =$ etc. $= 0$; wo hingegen ein Punct steht, ist auch die *dérivée* von a, das ist $\mathrm{D}.a$, und so auch $\mathrm{D^2}.a$; $\mathrm{D^3}.a$; $\mathrm{D^4}.a$... variabel.

Denselben Unterschied (mit oder ohne Punct) werde ich in der Folge auch bey dem gewöhnlichen Differentialzeichen beobachten, und $d\varphi a$, $d^2\varphi a$, $d^3\varphi a$,... für *beständige* da, von $d.\varphi a$, $d^2.\varphi a$, $d^3.\varphi a$... wo auch die $d.a$, $d^2.a$, $d^3.a$, ... variabel sind, unterscheiden.

17. Die Entwickelung der successiven Differenzialen $\mathrm{D}\varphi a$. $\mathrm{D^2}\varphi a$, $\mathrm{D^3}\varphi a$, ... wo $\mathrm{D}a = 1$, also höhere Differenziale von a gar nicht vorkommen, hat keine Schwierigkeit. Aber die Entwickelung für $\mathrm{D}.\varphi a$, $\mathrm{D^2}.\varphi a$, $\mathrm{D^3}.\varphi a$... (15) wo $\mathrm{D}.a$ und alle höhere Differenziale von a beybehalten werden, führt gar bald zu Weitläuftigkeiten.

So ist z. B.

$$\text{D}.\,\varphi a = \text{D}\varphi a\,.\,\text{D}.a$$

$$\begin{aligned}\text{D}.^2\varphi a &= \text{D}.(\text{D}.\varphi a) = \text{D}.\,(\text{D}\varphi a\,.\,\text{D}.a)\\ &= \text{D}\varphi a\,.\,\text{D}.(\text{D}.a) + \text{D}.(\text{D}\varphi a)\,.\,\text{D}.a\\ &= \text{D}\varphi a\,.\,\text{D}^2.a \quad + \text{D}^2\varphi a(\text{D}.a)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{D}^3.\,\varphi a &= \text{D}.(\text{D}^2.\varphi a)\\ &= \text{D}.[\text{D}\varphi a\,.\,\text{D}^2.a + \text{D}^2\varphi a\,(\text{D}.a)^2]\\ &= \text{D}\varphi a\,.\,\text{D}^3.a + \text{D}^2\varphi a.\,\text{D}.a.\,\text{D}^2.a\\ &= \text{D}\varphi a\,.\,\text{D}^3.a + \text{D}^2\varphi a.\,\text{D}.a\,\text{D}.^2a\\ &\qquad + \text{D}^2\varphi a.\,2\,\text{D}.a.\,\text{D}^2.a + \text{D}^3\varphi a.\,(\text{D}.a)^3\\ &= \text{D}\varphi a.\,\text{D}^3.a + 3\text{D}^2\varphi a.\,\text{D}.a.\,\text{D}^2.a + \text{D}^3\varphi a.\\ &\qquad\qquad (\text{D}.a)^3\end{aligned}$$

Diesen, von Arbogast [no. 5] aufgeführten Werthen von $\text{D}.\varphi a$, $\text{D}^2.\varphi a$, $\text{D}^3.\,\varphi a$, will ich noch den von $\text{D}^4.\varphi a$, aber, zu Vermeidung der Weitläuftigkeiten, in der lezten reducirten Gestalt, ohne die Zwischenoperationen, hier beyfügen:

$$\begin{aligned}\text{D}^4.\varphi a &= \text{D}\varphi\,a.\,\text{D}^4.a + \text{D}^2\varphi a[4\,\text{D}.a.\,\text{D}^3.a + 3\,(\text{D}^2.a)^2]\\ &\quad + \text{D}^3\varphi a.\,6.\;(\text{D}.a)^2.\,\text{D}^2.a + \text{D}^4\varphi a.\,(\text{D}.a)^4\end{aligned}$$

Der weitere Fortgang hat keinen Anstofs, wenn man die Weitläuftigkeiten nicht rechnen will, welche die mehreren Differenziationen und Reductionen veranlassen, die sich merklich anhäufen, und die Entwickelung der Derivationen für spätere Glieder in der Folge so gut als unmöglich machen.[n]) Auf diesem Wege wird

[n]) So z. B. kommen auf dem Wege der successiven Differenziation, in dem Werthe von $D^4.\,\varphi a$ die zu $D^2.\,\varphi a$ und $D^3\,\varphi a$ zugehörigen Factoren (oder höhere Differenziale von a) nicht, wie hier beysammen vor, sondern müssen erst zerstreut zusammengelesen werden. Diese Reduction wird immer häufiger und lästiger, je grösser für die Derivation $D^n.\,\varphi a$ der Werth von n ist.

das zusammengesetzte $D^n. \varphi\, a$ in die viel einfachern $D\varphi a$, $D^2\varphi a$, $D^3\varphi a \ldots$ $D^n\varphi a$ und in $D.a$, $D^2.a$ $D^3.a \ldots D^n.a$ mit ihren Potenzen zerlegt. Diese Zerlegungen finden zunächst ihre Anwendung in folgenden beyden Sätzen.

18. Wären in $a + b.x + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$ die $a, b, c, d \ldots$ ganz unabhängige, durch kein Gesetz mit einander verbundene, Grössen, wo also auch b nicht von a, c nicht von b, d nicht von c, u. s. w. derivirten: so liesse sich gleichwohl

$$\varphi(a + b.x + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \text{etc.})$$

$$=$$

$$\varphi a + D.\varphi a.x + \frac{D^2.\varphi a}{1.2}.x^2 + \frac{D^3.\varphi a}{1.2.3}.x^3 + \text{etc},$$

(wie in 15) setzen und so die $a, b, c, d \ldots$ als einstweilen von einander derivirend betrachten, wenn man nur hinterher, nachdem die zusammengesezten Derivationen in einfachere aufgelöſst worden (17) $D.a$ mit b, $D^2.a$ mit c, $D^3.a$ mit d, u. s. w. austauscht, oder, nach vollbrachten Derivationen, $D.a = b$, $D.b = c$, $D.c = d$, u. s. w. sezt. Die Entwickelung (17) liefert nämlich das volle Resultat der von einander abhängigen Grössen $D.a$, $D^2.a$, $D^3.a$, u. s. w die man sodann durch jene Austauschung mit $b, c, d \ldots$ als ganz unabhängig von einander ansehen und betrachten kann.

Die Function

$$\varphi(a + b.x + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \text{etc})$$

für jede $a, b, c, d \ldots$ in eine Reihe von der Gestalt

$$A + B.x + \frac{C}{1.2}x^2 + \frac{D}{1.2.3}x^3 \ldots + \frac{A_n}{1.2\ldots n}x^n + \text{etc.}$$

zu entwickeln, wäre demnaeh $A = \varphi a$, $B = \text{D}.\varphi a$, $C = \text{D}^2.\varphi a \ldots A_n = \text{D}^n.\varphi a$. Bey Formirung der Derivationen würden hier alle $\text{D}.a$, $\text{D}^2.a$, $\text{D}^3.a$ u. s. w. als variable Grössen zugelassen, aber nachher b für $\text{D}.a$, c für $\text{D}.^2 a$, d für $\text{D}^3.a$, u. s. w. oder $\text{D}.a, = b$, $\text{D}.b = c$, $\text{D}.c = d$, u. s. w. gesezt [no. 6].

19. Da die Polynomien selten in der Form

$$a + b.x + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \text{etc.},$$

oder mit den numerisehen Coefficienten $\frac{1}{1.2}$, $\frac{1}{1.2.3}$, $\frac{1}{1.2.3.4}$, u. s. w. versehen, vorkommen, sondern vielmehr in der gewöhnliehen Gestalt

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}$$

ohne dergleichen Coefficienten, erscheinen: so sezt man auch gewöhnlich

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots + \alpha_n x^n \ldots)$$

$$=$$

$$A + Bx + Cx^2 + \text{D}x^3 \ldots + {}_nAx^n \ldots$$

wo α_n, A_n die nten Coefficienten nach dem ersten α, A, respective bedeuten.

Hier darf man nur, wie man leicht übersieht die Derivationen, ohne alle Rücksicht auf die numerischen Coefficienten $\frac{1}{1.2}$, $\frac{1}{1.2.3}$ u. s. w. machen, und hernach

β	statt	$D.\alpha$	B	statt	$D.A$
1.2γ	,	$D^2.\alpha$	$1.2C$	,	$D^2.A$
$1.2.3\delta$	,	$D^3.\alpha$	$1.2.3D$	,	$D^3.A$
,	,	,	,	,	.
$1.2..n\alpha_n$	statt	$D^n.\alpha$	$1.2..nA_n$	statt	$D^n.A$

substituiren [no. 7].

ZWEITER ABSCHNITT.

ARBOGAT's erste Auflösung des Hauptproblems zu Entwicklung der Functionen für Polynomien und dessen Derivations-Formel dafür.

20. Aufgabe. Es sey

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots + \alpha_n x^n \ldots)$$

eine willkührliche Function eines beliebigen Polynoms, wo α, β, γ, δ, . . . von einander ganz unabhängige Grössen seyn mögen; man soll diese Function in eine Reihe von der Gestalt

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots + A_n x^n \ldots$$

entwickeln.

Auflösung.

Aus	und (19)
$A = \varphi\alpha$	$D.A = B$
$D.A = D.\varphi\alpha$	$D^2.A = 1.2C$
$D^2.A = D^2.\varphi\alpha$	$D^3.A = 1.2.3D$
$D^3.A = D^3.\varphi\alpha$	$D^4.A = 1.2.3.4E$
. , ,	. . ,
$D^n.A = D^n.\varphi\alpha$	$D^n.A = 1.2.3..nA_n$

folgt

$$A = \varphi\alpha \qquad D = \frac{D^3.\varphi\alpha}{1.2.3}$$

$$B = \frac{D.\ \varphi\alpha}{1} \qquad ,\ ,\ ,$$

$$C = \frac{D^2.\varphi\alpha}{1.2} \qquad A_n = \frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$$

Demnach ist

$$A + B x + C x^2 + D x^3 \ldots + A_n x^n \ldots$$

das ist

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots + \alpha_n x^n \ldots)$$

$$=$$

$$\varphi\alpha + \frac{D.\varphi\alpha}{1}x + \frac{D^2.\varphi\alpha}{1.2}x^2 + \frac{D^3.\varphi\alpha}{1.2.3}x^3 \ldots$$

$$+ \frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}x^n \ldots$$

wo man aber, nach geendeten Derivationen, in den (nach 17) gezogenen Resultaten

$D.\alpha$ mit β	und eben so	$D.A$ mit B	
$D^2.\alpha$, 1.2γ		$D^2.A$,	$1.2C$
$D^3.\alpha$, $1.2.3\delta$		$D^3.A$,	$1.2.3D$
. , ,		, ,	,
$D^n.\alpha$, $1.2..n\alpha_n$		$D^n.A$,	$1.2..nA_n$

umtauschen mufs. Hier werden nämlich die Coefficienten β, γ, δ, ε . . - als *Dérivées* der variabeln α betrachtet und in diese nachher die eben angewiesene Substitution vorgenommen.

21. Wenn man die Werthe der Coefficienten A, B, C . . . hintereinander berechnet, und jedesmal die nöthigen Reductionen macht, so kann man schlechthin

[no. 8]

statt D.α D.β D.γ D.δ . . . D.α_{n-1}

setzen 1β 2γ 3δ 4ε . . . $n\alpha_n$

und eben so

statt D.A D.B D.C D.D . . . D.A_{n-1} . . .

setzen $1B$ $2C$ $3D$ $4E$. . . nA_n

22. Bey Entwickelung der Derivationen (erinnert ARBOGAST) könne man, bey einiger Fertigkeit, anstatt die mit dem Zeichen D behafteten Buchstaben hinzuschreiben, sogleich die für sie zu substituirenden, mit den zugehörigen numerischen Coefficienten versehenen, an jener Stelle setzen. In diesem Falle aber sey es nöthig, die Coefficienten der Potenzen x^0, x^1, x^2, x^3 u. s. w. eine gewisse Ordnung, z. B. die alphabetische befolgen zu lassen, oder sie mit gewissen Zeigern (*indices*) zu versehen; auch sey es vortheilhaft, daſs die Zeigerzahlen mit den Exponenten der Potenzen von x überein kommen, zu welchen die Coefficienten gehören. So folgen in der Reihe $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. die Coefficienten α, β, γ, δ . . . nach der Ordnung der Buchstaben, wofür man aber auch α_0, α_1, α_2, α_3 ... setzen könne, wo die Zeigerzahlen 0, 1, 2, 3 . . . mit den Exponenten der zugehörigen Potenzen von x übereinstimmen [no. 9; 52. p. 44].°)

°) Solcher Buchstaben mit Zeigerzahlen bedient sich auch LACROIX sehr häufig, und merkt dabey an: A_0, A_1, A_2, A_3, etc. *sont des coefficiens indépendans de* x, *et les chiffres inferieurs* 0, 1, 2, 3 etc. *marquent l'exposant de la puissance de* x, *qui multiplie la lettre, à la quelle ils sont attachés; ainsi* A_m *sera le coefficient de* x^m. *Ce qui m'a determiné à employer cette notation, quoiqu' elle paraisse un peu compliquée, c' est que par son moyen il sera facile de decouvrir la loi qui regne entre les valeurs des coefficiens.* *Traité du Calc. diff. p.* 33. Nämlich, schon in der gemeinen Arithmetik, und noch mehr in der Algebra, kommen Operationen und Zeichnungen vor, die man nicht für das nimmt, was sie

23. Die Regeln der Entwickelung der Derivationen $D. \varphi\alpha$ $D^2.\varphi\alpha$, $D^3.\varphi\alpha$ etc. kommen hier mit denen des Differentialcalculs für $d.\varphi\alpha$, $d^2.\varphi\alpha$, $d^3.\varphi\alpha$, etc. für veränderliche α; $d.\alpha$, $d^2.\alpha$ $d^3.\alpha$ etc. vollkommen überein. Auch fällt in die Augen, daſs

$$\varphi\alpha, \frac{D\,\varphi\alpha}{1}, \frac{D^2\,\varphi\alpha}{1.2}, \frac{D^3\,\varphi\alpha}{1.2.3}$$ u. s. w. (ohne Punct nach dem D) die Coefficienten der successiven Glieder

sind, wenigstens nicht daran denkt — combinatorische. So ist das Schreiben der Zahlen nach ihrer Folge, eine fortlaufende combinatorische Anordnung der Ziffern; so giebt die alphabetische Ordnung der Buchstaben *a, b, c, d* . . . oder die Reihe der Zahlen 0, 1, 2, 3 . . . an sich und mit Buchstaben verbunden, die Grundlage für die daraus abzuleitenden combinatorischen Ordnungsgesetze; und man sieht leicht, daſs, in den gewöhnlichen Fällen, auf den todten Buchstaben wenig oder nichts, auf die ihm beygefügte lebendige Zahl hingegen fast alles ankommt. Von den verschiedenen Arten die Coefficienten mit Buchstaben und Zahlen zu bezeichnen, in meinem (*Nov. Syst. Comb*, *p. XXXIV — XLI*) ausführlich. Die einfachsten Lokalzeichen (wie ich sie nenne) sind die Leibnitzischen *Numeri assumtitii siue suppostitii* (Ebend. *p. X*, 30. *Refert*-etc., und hier, S. 154. A). BÜRMANNS geistreiches *Polynome Combinatoire.* (hier S. 51. ff.) giebt unzählige Beyspiele von diesem Gebrauche.

Die Mittel also, die ARBOGAST hier (in 22) für die Zeichnung der Coefficienten der Potenzen von x vorschlägt, um bey einiger Fertigkeit, statt der derivativen Zeichen sogleich ihre Werthe schreiben zu können, [no. 9] sind wahrhaft combinatorischer Art, und die combinatorische Differenzial-Formel, die in der Folge (39) soll aufgeführt werden, wird zeigen, wie das was ARBOGAST fordert, und für die wirkliche Ausübung immer noch sehr schwierig erfunden werden dürfte (weil man doch eine Derivation nach der andern suchen muſs, um zu wissen, was man an ihrer Stelle zu substituiren habe); diese Formel, sage ich, wird zeigen, wie jene Forderung mit absoluter Leichtigkeit, die nichts zu wünschen übrig läſst, sich ausführen lasse.

der Entwickelung von $\varphi(\alpha + x)$; und

$$\varphi\alpha, \frac{D.\varphi\alpha}{1}, \frac{D^2.\varphi\alpha}{1.2}, \frac{D^3.\varphi\alpha}{1.2.3}$$ u. s. w. (mit einem Punct nach dem D) die Coefficienten der successiven Glieder der Entwickeluug von $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$ sind [no. 10]; wo also $\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$ den $(n+1)$ten Coefficienten dieser Entwickelung ausdrückt, d. i. $\varphi(p)\,\varkappa(n+1)$, wenn man $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.} = p$ setzt.

24. Das erste Glied $\varphi\alpha$ der evolvirten Function (18, 20) oder dasjenige, von welchem man alle übrige derivirt, heifst der Anfang oder Ursprung (*origine*) der Derivationen. Zuweilen fällt das Derivationsgesetz deutlicher in die Angen, wenn man das zweyte Glied zum Anfange der Derivationen nimmt.

Ist dieses Anfangsglied gegeben, und hat man darinn, oder in einigen der evolvirten Glieder, die Grössen aufgefunden, welche Functionen von andern Grössen sind, so macht das Übrige sofort keine Schwierigkeit, und die weitere Entwickelung geschieht fast ganz mechanisch: alles bezieht sich nemlich auf eine Reihe von Operationen, die sämtlich einen regelmäfsigen Gang befolgen.

Hätte das erste Glied α des Polynoms einen besondern Werth; wäre z. B. $\alpha = 1$, so würde $\varphi 1$ kein bequemes Anfangsglied seyn, die übrigen Glieder daraus zu deriviren. Man setze in diesem Falle statt 1 eine Grösse von unbestimmtem Werthe α, mit dem Vorbehalt in den gezogenen Resultaten den besondern Werth 1 wieder in die Stelle von α zu setzen [no. 11].

Hier ein paar Beyspiele zu Erläuterung der Auflösungsformel für die Aufgabe (20).

Exempel I.

25. Die Function

$$(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})^m$$

in eine Reihe von der Gestalt

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

zu entwickeln

Aufl. Weil x jede beliebige Werthe haben kann; so müssen die von x unabhängigen Grössen, einzeln einander gleich seyn. Daraus folgen, das erste Glied $A = \alpha^m$; und daraus weiter $B = \text{D}.A$, und $C = \frac{\text{D}.B}{2}$ und $D = \frac{\text{D}.C}{3}$, und $E = \frac{\text{D}.D}{4}$, u. s. w. die übrigen Coefficienten; jeder folgende aus dem nächstvorhergehenden, hinter einander, durch ganz einfache Derivationen (nach 21). Der Calcul, ohne weitere Abkürzung, giebt folgendes:

$$A = \alpha^m$$

$$B = \text{D}.A = m\alpha^{m-1}.\beta$$

$$2C = \text{D}.B = m\alpha^{m-1}.2\gamma + m.m-1.\alpha^{m-2}.\beta,\beta.$$

$$C = m\alpha^{m-1}\gamma + \frac{m\ m-1}{1.2}\alpha^{m-2}\beta^2$$

$$3D = \text{D}.C = m\alpha^{m-1}.3\delta$$

$$+ m.m-1.\alpha^{m-2}\beta.\gamma$$

$$+ \frac{m.m-1}{1.2}\alpha^{m-2}2\beta.2\gamma$$

$$+ \frac{m.m-1}{1.2}(m-2)\alpha^{m-3}\beta.\beta^2$$

$$D = m\alpha^{m-1}\delta + \frac{m.m-1}{1.2}\alpha^{m-2}.2\beta\gamma$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\alpha^{m-3}\beta^3$$

$$4E = D.D = m\alpha^{m-1}.4\varepsilon$$
$$+ m.m-1.\alpha^{m-2}.\beta\delta$$
$$+ \frac{m.m-1}{1.2}\alpha^{m-2}.2\beta.3\delta$$
$$+ \frac{m.m-1}{1.2}\alpha^{m-2}.2\gamma.2\gamma$$
$$+ \frac{m.m-1}{1.2}(m-2)\alpha^{m-3}.\beta.2\beta\gamma$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\alpha^{m-3}.3\beta^2.2\gamma$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}(m-3)\alpha^{m-4}\beta.\beta^3$$

$$E = m\alpha^{m-1}\varepsilon + \frac{m.m-1}{1.2}[2\beta\delta + \gamma^2]$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\alpha^{m-3}.3\beta^2\gamma$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\alpha^{m-4}\beta^4$$

u. s. w. Die successiven Derivationen D. A; D. B; D. C; D. D; etc. machen, wie man sieht, keine Schwierigkeit; aber die daraus erfolgenden Reductionen führen zu Weitläuftigkeiten.

Exempel II.

26. Das 5te Glied der Function

$\log(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.}) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$

zu entwickeln.

Aufl. Das gesuchte Glied ist $Ex^4 = \frac{D^4.\varphi\alpha}{1.2.3.4}x^4$, wie aus (20; S. 188) erhellet. Man darf also, den

Coefficienten E zu finden, nur alle Glieder des Werthes von $D^4.\varphi\alpha$ in (17) mit 1.2.3.4 dividiren, und statt $D\varphi\alpha$, $D^2\varphi\alpha$, $D^3\varphi\alpha$, $D^4\varphi\alpha$; und $D.\alpha$, $D^2.\alpha$, $D^3.\alpha$, $D^4.\alpha$, die zugehörigen Ausdrücke in $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ setzen. Es ist aber

$$\begin{array}{ll} \text{Für } \varphi\alpha = \log\alpha & \text{ingleichen (S. 188)} \\ D\varphi\alpha = +\alpha^{-1} & D.\alpha = 1\beta \\ D^2\varphi\alpha = -1\alpha^{-2} & D^2.\alpha = 1.2\gamma \\ D^3\varphi\alpha = +1.2\alpha^{-3} & D^3.\alpha = 1.2.3\delta \\ D^4\varphi\alpha = -1.2.3\alpha^{-4} & D^4.\alpha = 1.2.3.4\varepsilon \end{array}$$

Folglich (17)

$$\frac{D\varphi\alpha.D^4.\alpha}{1.2.3.4} = \frac{\alpha^{-1}.1.2.3.4\varepsilon}{1.2.3.4} = \alpha^{-1}\varepsilon$$

$$+\frac{D^2\varphi\alpha}{1.2.3.4}(4D.\alpha.D^3.\alpha + 3[D^2.\alpha]^2)$$

$$= \frac{-\alpha^{-2}}{1.2.3.4}(4\beta.1.2.3\delta + 3.4\gamma^2)$$

$$= -\frac{\alpha^{-2}}{2}(2\beta\delta + \gamma^2)$$

$$+\frac{6D^3\varphi\alpha.(D.\alpha)^2.D^2.\alpha}{1.2.3.4} = \frac{6.1.2\alpha^{-3}\beta^2.1.2.\gamma}{1.2.3.4}$$

$$= \frac{\alpha^{-3}}{3}.3\beta^2\gamma$$

$$+\frac{D^4\varphi\alpha(D.\alpha)^4}{1.2.3.4} = \frac{-1.2.3\alpha^{-4}.\beta^4}{1.2.3.4} = -\frac{\alpha^{-4}}{4}\beta^4$$

Die Summe dieser Werthe giebt demnach $\frac{D^4.\varphi\alpha}{1.2.3.4}$ d.i.

$$E = \alpha^{-1}\varepsilon - \frac{\alpha^{-2}}{2}(2\beta\delta + \gamma^2) + \frac{\alpha^{-3}}{3}.3\beta^2\gamma$$
$$-\frac{\alpha^{-4}}{4}\beta^4$$

mit dem Ausdrucke für E [no. 12; S. 9.] übereinstimmend. Auch hier (wie in 25) führen die Derivatio-

nen durch überflüssige Factoren, die sie aufführen, und weshalb man erst eine Reduction anstellen mufs, in Weitläuftigkeit. Man vergleiche Note (n).

27. Die beiden Beispiele (25, 26) erläutern das Verfahren von zwo Seiten vollständig. Ein Paar andere, aber nur von der ersten Art (wenn nehmlich folgende Glieder aus nächst vorhergehenden abgeleitet werden) hat ARBOGAST [no. 14, 16] beygebracht; auch gelegentlich gezeigt, wie daraus für die Coefficienten A, B, C, D die bekannten Formeln mit recurrirenden Gliedern können hergeleitet werden.

DRITTER ABSCHNITT.

Simplification des Arbogastischen Satzes [no. 7, hier 20] durch die combinatorische Analysis. Ableitung desselben Satzes, von derivativen Vorstellungen unabhängig, durch die combinatorische Methode der Potenzen. Uebergang aus den Differentialen von φx, wo alle höhere Differentiale von x beibehalten werden, in die Reihe für $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$. Verschiedene Bedeutungen der derivativen Function $\frac{D^n . g^m}{1 . 2 .. n}$.

28. Die Fiction (9), die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$... der polynomischen Reihe unter dem Functionalzeichen als veränderlich und von einander abhängig anzusehen, und $\frac{D^n . \varphi \alpha}{1 . 2 .. n}$ als eine in die einfachern $\frac{D \varphi \alpha}{1}$, $\frac{D^2 \varphi \alpha}{1.2}$, $\frac{D^3 \varphi \alpha}{1.2.3}$... $\frac{D^n \varphi \alpha}{1.2..n}$, und

in $D.\alpha$, $D^2.\alpha$, $D^3.\alpha$. . . $D^n.\alpha$ mit ihren Potenzen, zerlegbare Differentiation (17) aufzustellen, und am Ende $1\,\beta$; 1.2γ; $1.2.3\delta$. . . $1.2\,..\,n\,\alpha_n$ statt $D.\alpha$; $D^2.\alpha$; $D^3.\alpha$. . . $D^n.\alpha$ zu sezen (20); dieser Gedanke, sage ich, ist sinnreich und vielumfassend. So leicht aber auch auf diesem Wege wie so eben gezeigt worden ist, die ersten Glieder sich entwikkeln lassen, so erinnert doch Arbogast selbst [no. 19] (weil dadurch Grössen, die aus denselben Buchstaben bestehen, nicht selten mehreremale [p]) aufgeführt, und so Reductionen der zugehörigen numerischen Coefficienten wiederhohlt veranlaſst werden) es führe dieses Verfahren für spätere Glieder zu Weitläuftigkeiten; um so mehr, je entfernter diese vom ersten oder dem Anfangsgliede sind. „Man hat also" (fährt dieser scharfsinnige Analyst fort) Grund zu fragen, ob „sich nicht dieses Verfahren bis zu dem Puncte vereinfachen lasse, daſs alle Reduction dabei „aufgehoben wird, dergestalt, daſs wenn irgend „ein Glied (gut) geordnet gegeben ist, man augen„blicklich das nächstfolgende daraus ableiten, oder „auch jedes Glied für sich und auſser der Ord„nung [*terme isolé et hors du rang*, no, 40.] von „allen übrigen, vorhergehenden und folgenden, unab„hängig darstellen, und zwar bereits ganz redu„cirt und in der einfachsten Gestalt darstel„len könne; mit solcher Leichtigkeit, daſs nicht mehr „Zeit dazu erfordert wird, als nöthig ist, die Glieder „zu schreiben [no. 30, 42.]."

p) So z. B. im Exempel I. (25.) kommen die Glieder, welche $\alpha^{m-2}\beta\gamma$ und $\alpha^{m-2}\beta\delta$ und $\alpha^{m-3}\beta^2\gamma$ enthalten, jedes zweymal; und so diese und andere in der Folge noch öfter vor; welches denn mehrere Reductionen ihrer Zahlencoefficienten nöthig macht. Wegen der Zahlencoefficienten und ihrer Reduction vergleiche man Exempel II. (26.)

29. Diese Forderung ist so vollkommen mit dem übereinstimmend, was an den combinatorischen Anordnungen schon vorlängst und mehrere male, vorzugsweise gerühmt q), und nur noch neuerlich bey Aufstellung einer combinatorischen Involution (Samml. II. S. 98.) von mir wiederholt worden ist. Ich will auch diese Stelle zu unmittelbarer Vergleichung hier hersetzen: „Eine leichtere Darstellung durch Ableitung der Complexionen, oder ihrer Ordnungen, „von einander, läfst sich nicht gedenken Sie bedarf „keiner Vorbereitung, stellt die Buchstaben, sogleich „mit ihren Exponenten versehen, auf, und ist frey „von allen Substitutionen complexer Zeichen. „Ihre rein-combinatorische Anordnung beruht „ganz auf einer äusserst leichten Umtauschung „der Buchstaben und ihrer Potenzen, die nicht mehr „Zeit erfordert, als man nöthig hat, ihre Glie„der zu schreiben. Alles wird gleich so und an „dem Orte, ohne etwas weiter dabey zu ändern „(reduciren) oder zu verrücken, zusammenge„setzt, wie und wo man es zum Gebrauche nützlich „findet; gleichviel, ob man die einzelnen Complexio„nen unter oder nebeneinander, oder in welcher an„dern Lage man sie schreiben will."

30. Für die Evolution der Functionen werden demnach (in 28) von dem derivativen Verfahren gleiche Vortheile, als (in 29) von den combinatori-

q) *Adhibui notationis modum eiusmodi, qui terminorum singulorum progressus legem — manifeste ante oculos ponit, sic vt, ex terminis, qui proponuntur, generalioribus, terminorum quaesitorum coefficientes quicunque, ex ordine et extra ordinem, a praecedentibus independenter, in terminis statim simplicissimis, per coefficientes datos particulares definitis, facillime possint, et absque vlla reductione, quae vulgo comitari solet substitutiones,* DERIVARI. *Infin. Dign. Praef. p. XII, XIII.*

schen Involutionen versprochen. Was letztere leisten, ist allgemein bekannt, und die Kenner haben hierüber einstimmig entschieden. Auch darüber scheint man bisher einverstanden gewesen zu seyn, daſs eine so leichte Darstellung der Glieder, wie die combinatorische, auf einem andern Wege schwerlich oder gar nicht zu erreichen seyn möchte. Um so mehr wird die Erwartung gespannt, durch welches nicht-combinatorische Verfahren, und wie insbesondere durch analytische Derivationen, oder ihre Vermittelung die (in 28) versprochenen Vortheile zu erlangen seyn dürften?

31. Bevor ich zu dem von Arbogast [no. 20, 21] eigends dafür aufgesellten, und besonders (von jenem Satze [no. 7] hier (20) unabhängig) erwiesenen Lehrsatze fortgehe, so wird es nützlich seyn zu versuchen, in wie fern jener, an sich zwar lehrreiche und wichtige, aber für die Ausübung und Anwendung zu behandeln schwierige (28) Satz [no. 7] sich combinatorisch verbessern und erleichtern, und zu einem, dem [no. 20] vollkommen gleichgültigen Lehrsatz umformen und darstellen lasse. Eine weitere Analyse und Simplification des Satzes [no. 7] ist gewiſs ganz in dem Arbogastischen Plane; um so mehr, wenn er sich zuletzt in den Satz [no. 20] auflöst, und dadurch den Zusammenhang beider deutlich vor Augen legt.

32. Unbehülflich ist der derivative Satz (20) darinn, daſs man seine Coefficienten $\frac{\mathrm{D}.\varphi\alpha}{1}$, $\frac{\mathrm{D}^2.\varphi\alpha}{1.2}$, $\frac{\mathrm{D}^3.\varphi\alpha}{1.2.3}$... $\frac{\mathrm{D}^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$, durch successive Differentiation suchen muſs (17) und kein Mittel angegeben wird, wie man sie unabhängig von einander finden, oder doch die im ersten Falle eintretenden groſsen Weitläuftigkeiten (Note n) vermeiden könne. Ein

Verfahren, das dieser Unbequemlichkeit abhülfe, würde schon eine grofse Verbesserung seyn. Eine solche wird man in der Anwendung der vom Professor PFAFF aufgestellten Aufgabe (Samml. II. S. 158. §. 4.) und deren Auflösung (das. S. 160, 161.) finden [r].

33. Die Pfaffische Aufgabe in solchen Zeichen aufzuführen, als man hier braucht, darf man nur

statt der dortigen	hier setzen:	statt der dortigen	hier setzen:
d^n	D^n.	x	α
X	$\varphi\alpha$	dx	$D.\alpha$
X'	$D\varphi\alpha$	d^2x	$D^2.\alpha$
X''	$D^2\varphi\alpha$	d^3x	$D^3.\alpha$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
X^n	$D^n\varphi\alpha$	d^nx	$D^n.\alpha$

und nun die

„Aufgabe (a. a. O. S. 158.)

„Es sey $\varphi\alpha$ irgend eine Function der veränderli-„chen α; aus ihren Differentialen, wenn $D\alpha$ beständig „ist, dieselbigen herzuleiten, wenn kein beständiges „Differential von α angenommen wird."

r) Die Auflösung der Aufgabe wird dort (S. 160) zuerst in Lokalzeichen $P\varkappa n$; $P^2\varkappa(n-1)$; $P^3\varkappa(n-2)$; ... denen die combinatorischen Classenzeichen a^nA; b^nB; c^nC; ... correspondiren, ausgedrückt. Ich will hier die letzte Darstellung (S. 161) aufführen, und die erste (in Lokalzeichen) in der Folge (43) nachholen. Es ist nützlich, beyde zu kennen, um nach Umständen Gebrauch davon zu machen.

„Auflösungs-Formel (Ebend. S. 161.)

$$„ \frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n} = \frac{D\varphi\alpha}{1} a^n A + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2} b^n B$$

$$„ \quad + \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3} c^n C + \ldots + \frac{D^n\varphi\alpha}{1.2..n} n^n N$$

$$„ \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \frac{D.\alpha}{1}, & \frac{D^2.\alpha}{1.2}, & \frac{D^3.\alpha}{1.2.3} & \ldots \end{matrix} \right)$$

Das hier in Klammern Eingeschlossene ist bekanntermaſsen der Zeiger für die Complexionen der Combinationsklassen ^nA, ^nB, ^nC, etc.

34. Arbogast unterscheidet [no. 35] *Dérivées simples*, wie $D^n.\varphi\alpha$, von *Derivées divisées*, $\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$; auch bestimmt der Werth der einen Art sogleich den Werth der andern. So z. B. wäre (33)

$$D^n.\varphi\alpha = 1.2..n \left[\frac{D\varphi\alpha}{1} a^n A + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2} b^n B \right.$$

$$\left. + \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3} c^n C + \ldots + \frac{D^n\varphi\alpha}{1.2..n} n^n N \right]$$

(Der Zeiger hier, wie in 33).

Für die *Dérivées divisées* wird [no. 39] ein besonderes Zeichen eingeführt, und $\underset{c}{D}^m$ statt $\frac{D^m}{1.2..m}$, ingleichen $\underset{c}{D}^n.\varphi\alpha$ statt $\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$ gesetzt. Ich werde mich für den wenigen Gebrauch, den ich von diesen Zeichen hier mache, dieser Abkürzung nicht bedienen.

Exempel zu (34).

35. Den Werth der einfachen *Derivée* $D^5.\varphi\alpha$, von den vorhergehenden unabhängig, in Differentialen von $\varphi\alpha$ und α, gut geordnet darzustellen.

Man setze $n=5$ in (34) und entwickle, nach dem Zeiger, die Complexionen der Classen ^5A, ^5B, ^5C, ^5D, ^5E, mit Vorsetzung der zugehörigen Versetzungszahlen oder Polynomialcoefficienten a, b, c, d, e, und Beyfügung der $D\varphi\alpha$, $D^2\varphi\alpha$ $D^5\varphi\alpha$, wie solche in der Formel den einzelnen Classen vorstehen. Dies giebt:

$$D^5.\varphi\alpha =$$

$$D\varphi\alpha.D^5.\alpha + D^2\varphi\alpha[5D.\alpha.D^4.\alpha + 10D^2.\alpha.D^3.\alpha]$$

$$+ D^3\varphi\alpha[10(D.\alpha)^2.D^3.\alpha + 15D.\alpha(D^2.\alpha)^2]$$

$$+ D^4\varphi\alpha.10(D.\alpha)^3.D^2.\alpha + D^5\varphi\alpha.(D.\alpha)^5$$

36. Ausserdem, dafs man vermittelst der Pfaffischen combinatorischen Formel jedes Glied $D^n.\varphi\alpha$ (mit oder ohne Divisor $(1.2.3..n)$ von allen vorhergehenden unabhängig, findet, erlangt man das gesuchte Resultat auch viel leichter als auf dem Wege der successiven Derivation. Den Unterschied deutlich einzusehen, dürfte man nur hier $D^5.\varphi\alpha$ aus $D[D^4.\varphi\alpha]$ nach dem Werthe von $D^4.\varphi\alpha$ in (17) durch gewöhnliche Differentiation suchen, wo man gar bald, und noch vielmehr bey spätern Gliedern, in Weitläufigkeiten gerathen würde.

37. Setzte man in (35) die Werthe von $\varphi\alpha$ und der Differentialen von $\varphi\alpha$ und α, wie in (26) also

$$\varphi\alpha = log.\alpha;\ D\varphi\alpha = \alpha^{-1}, \ldots D^5.\varphi\alpha = 1.2.3.4\alpha^{-5}$$

$$D.\alpha = 1\beta;\ D^2.\alpha = 1.2\gamma; \ldots D^5.\alpha = 1.2.3.4.5\zeta$$

und dividirte alle Glieder durch $1.2,3.4.5$, so fände man den Coefficienten des 6sten Gliedes von

$$log.(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \text{etc,})$$

oder $F = \alpha^{-1}.\zeta - \frac{\alpha^{-2}}{2}(2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta)$

$$+ \frac{\alpha^{-3}}{3}(3\beta^2\delta + 3\beta\gamma^2) - \frac{\alpha^{-4}}{4}4\beta^3\gamma + \frac{\alpha^{-5}}{5}\beta^5$$

gleich gut geordnet; vollkommen, wie [no. 12, p. 9]

38. Das Verfahren (35 — 37) wo man 1) die *Dérivée simple* $D^5.\varphi\alpha$ (durch Aufhebung des Divisors $1.2.3.4.5$) nach (34), in $D\varphi\alpha$, $D^2\varphi\alpha \ldots D^5\varphi\alpha$ und $D.\alpha$, $D^2.\alpha \ldots D^5.\alpha$ ausdrückt, 2) nachher die Werthe 1β; $1.2\gamma \ldots 1.2.3.4.5\zeta$, für $D.\alpha$; $D^2.\alpha$; $\ldots D^5.\alpha$ (37) substituirt, und zugleich 3) durch den Divisor $1.2.3.4.5$ die *Derivée simple* zur *divisée* macht; dieses Verfahren, sage ich, würde ein beträchtlicher Umweg seyn, und dennoch wäre er viel kürzer, als wenn man die gewöhnliche Heerstraſse der successiven Differentiation verfolgt. Aber es läſst sich dasselbe sehr stark, und über alle Vorstellung hinaus beträchtlich, abkürzen und simplificiren, wenn man die Substitution der Werthe für

$$D.\alpha = 1\beta;\ D^2.\alpha = 1.2\gamma;\ D^3.\alpha = 1.2.3\delta;$$
$$D^4.\alpha = 1.2.3.4\varepsilon, \text{ etc.}$$

nicht in den entwickelten Werth von $D^n.\varphi\alpha$ in (35) sondern sogleich in den Zeiger der Auflösungsformel (33) macht. Denn durch diese Substitution verwandelt sich jener zusammengesetzte Zeiger (33)

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \frac{D.\alpha}{1}, & \frac{D^2.\alpha}{1.2}, & \frac{D^3.\alpha}{1.2.3}, & \frac{D^4.\alpha}{1.2.3.4}, & \frac{D^5.\alpha}{1.2.3.4.5} & \ldots \end{matrix}\right)$$

in den ganz einfachen

$$\left(\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots \\ \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \ldots \end{matrix}\right)$$

Hier bleiben blos die leicht zu übersehenden $D\varphi\alpha$, $D^2\varphi\alpha$, $D^3\varphi\alpha$, ... in der Formel (33); die beschwerliche Differentiation $D^n.\varphi\alpha$ hingegen, fällt ganz weg, weil die $D.\alpha$: $D^2.\alpha$, $D^3.\alpha$, ... die man daraus brauchte; nun durch die simpeln β, γ, δ, ... vertreten werden, deren Verbindungsgesetz durch die $\mathfrak{a}^n A$; $\mathfrak{b}^n B$, $\mathfrak{c}^n C$, ..., combinatorisch, das heiſst hier, mit

absoluter Leichtigkeit (Note o am Ende) gegeben sind, die nichts zu wünschen übrig läſst.

39. Und nun die aus (38) abgeleitete combinatorisch-analytische ganz simple Auflösungsformel des Hauptproblems (20).

Es ist nämlich: $\varphi\ (p)\ \varkappa\ (n+1)$ oder

$$A_n = \frac{D^n.\varphi\alpha}{1\,2\,..\,n} = \frac{D\varphi\alpha}{1}\ \mathfrak{a}^n A + \frac{D^2\varphi\alpha}{1\,.\,2}\ \mathfrak{b}^n B + \frac{D^3\varphi\alpha}{1\,.\,2\,.\,3}\ \mathfrak{c}^n C + \ldots + \frac{D^n\varphi\alpha}{1\,.\,2\,..\,n}\ \mathfrak{n}^n N \quad (33)$$

Folglich $\varphi\,(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\zeta x^5+\text{etc.})$

$$= \varphi\alpha$$
$$+ \frac{D\varphi\alpha}{1}\ \mathfrak{a}^1\ A x$$
$$+ \left(\frac{D\varphi\alpha}{1}\ \mathfrak{a}^2\ A + \frac{D^2\varphi\alpha}{1\,.\,2}\ \mathfrak{b}^2\ B\right) x^2$$
$$+ \left(\frac{D\varphi\alpha}{1}\ \mathfrak{a}^3\ A + \frac{D^2\varphi\alpha}{1\,.\,2}\ \mathfrak{b}^3\ B + \frac{D^3\varphi\alpha}{1\,.\,2\,.\,3}\ \mathfrak{c}^3\ C\right) x^3$$
$$+ \left(\frac{D\varphi\alpha}{1}\ \mathfrak{a}^4\ A + \frac{D^2\varphi\alpha}{1\,.\,2}\ \mathfrak{b}^4\ B + \frac{D^3\varphi\alpha}{1\,.\,2\,.\,3}\ \mathfrak{c}^4\ C + \frac{D^4\varphi\alpha}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\ \mathfrak{d}^4\ D\right) x^4$$
$$+ \quad ; \quad ; \quad ; \quad ;$$

$$\left(\begin{matrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \eta, & \vartheta, & \iota, & \varkappa\ \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9\ \ldots \end{matrix}\right)$$

Das Fortgangsgesetz, sowohl für die successiven Differentiale $\frac{D\varphi\alpha}{1}, \frac{D^2\varphi\alpha}{1\,.\,2}, \frac{D^3\varphi\alpha}{1\,.\,2\,.\,3}\ \ldots$ als auch für die combinatorischen Grössen $\mathfrak{a}^n A$, $\mathfrak{b}^n B$, $\mathfrak{c}^n C\ \ldots$ fällt deutlich in die Augen.

40. In dieser evolvirten Function ist eben so wie in (20) α der einzige mit dem Functionalzeichen φ behaftete Buchstabe; daher auch die Differentialen von $\varphi\alpha$, nach Beschaffenheit der Function, sehr verschiedene Werthe haben können. Die folgenden Coefficienten β, γ, δ, ε . . . der polynomischen Reihe hingegen, machen die Bestandtheile der Combinationsclassen ${}^nA$, ${}^nB$, ${}^nC$ ${}^nD$, . . . nach dem beygefügten Zeiger aus. Diese Classen, mit den zugehörigen Versetzungszahlen a, b, c, d . . ., der Elemente ihrer einzelnen Complexionen, stellen die Coefficienten der Potenzen ganzer positiver Zahlen 1, 2, 3 ... n der Reihe $\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 +$ etc. dar, und sind für alle mögliche Functionen der Polynomien, für denselben Zeiger, dieselben; daher sie auch Arbogast mit einem auszeichnenden Namen Polynomial-Grössen genannt hat [no. 23]. Wie sich die Complexionen der Combinationsclassen, ${}^nA$, ${}^nB$, ${}^nC$... für bestimmte Werthe von n, combinatorisch entwikkeln und darstellen lassen, kann ich, als bekannt voraussetzen. Diejenigen Leser inzwischen, die gleichwohl hier noch einige Belehrung wünschen und erwarten, werden solche im ersten Anhange zu dieser Abhandlung finden.

41. Der Satz (39) bei welchem die Aufgabe (20) zum Grunde gelegt worden, läſst sich auch aus Taylor's Satze, auf blos combinatorischen Wegen ganz kurz und direct herleiten, auch vortheilhaft darauf mein *Methodus Potentiarum* (*Infin. Dign.* p. 101, 102) anwenden, von welchem ich erinnert und durch eine groſse Menge von Beyspielen (*Ibid.* p. 102 — 120) gezeigt habe, daſs er eine Brücke sey, auf welcher man aus den Functionen der Binomien in die der Polynomien bequem übergeht [s]).

[s]) *Methodi Potentiarum latissime patet usus, quandoquidem generaliter potest et directe applicari, vbi in functione aliqua*

42. So wie nemlich aus dem Binom $\alpha + x$ das Polynom $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc hervorgeht, wenn man statt x in jenem, die Reihe $\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. für dieses setzt: eben so darf man nur in der entwickelten Function (12)

$$\varphi(\alpha + x) = \varphi\alpha + \frac{D\varphi\alpha}{1} x^1 + \frac{D^2\varphi\alpha}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3\varphi\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \text{etc.}$$

überall statt x und ihren Potenzen, die Reihe $\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. und ihre Potenzen, combinatorisch entwickelt, setzen und zuletzt alles nach x^0, x^1, x^2, x^3, ... oder nach steigenden Potenzen von x, ordnen, indem man die zu einerley Potenz von x gehörigen Coefficienten zusammen nimmt [†]). Die Substitution jener Entwickelung, so wie diese Anordnung, hilft nun der *Methodus Potentiarum* ersparen, der alles in combinatorischen Zeichen sogleich entwickelt und gehörig geordnet auf einmal darstellt.

Vergleicht man nämlich die Reihe in y (*Infin. Dign.* p. 101, no. 2.) linker Hand des dortigen Gleichheitszeichens, mit der hier entwickelten Reihe für $\varphi(\alpha + x)$ vom zweiten Gliede an, so sind

dort: $a \quad b \quad c \quad d \quad \ldots ; y$

hier: $\frac{D\varphi\alpha}{1}, \frac{D^2\varphi\alpha}{1 \cdot 2}, \frac{D^3\varphi\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{D^4\varphi\alpha}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \ldots ; x$

und man findet, statt des dortigen z rechter Hand des Gleichheitszeichens, hier x gesetzt:

sive serie, terminis quotcunque constante, pro simplicium dignitatibus (x^n) *substituendae sunt polynomiorum potestates* $(\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.})^n$; *quo fit, ut ad functionum evolutiones, serierumque et aequationum transformationes sit fructuosissima* (*Infin. Dign. Praef. p. XII.*)

†) Eine ähnliche Substitution, in ähnlicher Absicht, hat auch ARBOGAST [no. 20, 21.] vorgenommen. Man sehe (55).

$$\varphi(\alpha + \beta x^1 + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.})$$
$$= \varphi\alpha + \frac{D\varphi\alpha}{1}\, \mathfrak{a}^1 A\, x^1$$
$$+ \left(\frac{D\varphi\alpha}{1}\, \mathfrak{a}^2 A + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}\, \mathfrak{b}^2 B\right) x^2 + \text{etc.}$$

wie vorhin (39) $\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{pmatrix}$

43. In (39) beziehen sich die Combinationsclassen ^1A, ^2A, ^2B; u. s. w. auf den untergesetzten ganz einfachen Zeiger $\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta & \ldots \\ 1, & 2, & 3 & \ldots \end{pmatrix}$. Setzt man also

$$\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.} = p$$

so ist (Samml. II. S. 161. und statt des dortigen P hier p gesetzt)

$$\mathfrak{a}^n A = p^1 \varkappa n;\ \mathfrak{b}^n B = p^2 \varkappa (n-1);\ \mathfrak{c}^n C = p^3 \varkappa (n-2);\ \ldots$$

Statt dieser Classen für bestimmte $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ substituire man (in 39) die zugehörigen auf p sich beziehenden Werthe, so erhält man aus der combinatorischen folgende Localformel:

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.})$$
$$= \varphi\alpha$$
$$+ \frac{D\varphi\alpha}{1}\, p^1 \varkappa 1 . x^1$$
$$+ \left(\frac{D\varphi\alpha}{1}\, p^1 \varkappa 2 + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}\, p^2 \varkappa 1\right) x^2$$
$$+ \left(\frac{D\varphi\alpha}{1}\, p^1 \varkappa 3 + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}\, p^2 \varkappa 2 + \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}\, p^3 \varkappa 1\right) x^3$$
$$+ \left(\frac{D\varphi\alpha}{1}\, p^1 \varkappa 4 + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}\, p^2 \varkappa 3 + \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}\, p^3 \varkappa 2 + \frac{D^4\varphi\alpha}{1.2.3.4}\, p^4 \varkappa 1\right) x^4$$
$$+ \quad : \quad : \quad : \quad : \quad : \quad :$$
$$p \begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \end{pmatrix}$$

44. Hier eine kurze Übersicht des Ganges der Verhandlungen (von 33 — 43)

I. Die Pfaffische Aufgabe (Sml II. S. 158. §. 4.) geht auf die unmittelbare, von allen vorhergehenden Differentialen unabhängige, Darstellung des n^{ten} Differentials der Function φx, wenn dx und alle höhere Differentiale von x beybehalten werden.

II. Die Auflösungformel (Ebendas. S. 161) [u] in differential- und combinatorischen Zeichen,

$$\frac{d^n.\varphi x}{1.2..n} = \frac{d\varphi x}{1} \mathfrak{a}^n A + \frac{d^2\varphi x}{1.2} \mathfrak{b}^n B + \frac{d^3\varphi x}{1.2.3} \mathfrak{c}^n C + \ldots + \frac{d^n\varphi x}{1.2..n} \mathfrak{n}^n N$$

zeigt in jedem Gliede rechter Hand des Gleichheitszeichens ein Product aus zween Factoren. Die ersten Factoren dieser Producte sind Differentiale von φx nach der Reihe, für ein beständiges $dx = 1$; die zweysen Factoren sind Combinationsclassen ^nA, ^nB, ^nC... nach der Ordnung, mit den Versetzungszahlen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$... ihrer einzelnen Complexionen, und schaffen die höhern Differentiale von x, vermittelst des zusammengesetzten Zeigers:

[u]) Eine der Pfaffischen ähnliche Formel, für $\frac{d^n.\varphi y}{1,2..n}$ oder $\frac{d^n.z}{1.2..n}$, durch höhere Differentiale von $\log \varphi y$ oder $\log z$ im Zeiger ausgedrückt, hat schon Prof. Rothe (Arch. der Math. H. IV. S. 433 — 435) gegeben. Auch Prof. Arbogast hat im VI. Abschnitte seines Werks [*no.* 361 — 364. p. 312, 313] die unmittelbare Darstellung von $d^n.\varphi x$ oder $\frac{d^n.\varphi x}{1.2..n}$, ohne die vorhergehenden Differentiale zu haben, nachgewiesen, aber davon keine Anwendung auf seinen Satz [*no.* 7] gemacht.

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \frac{dx}{1}, & \frac{d^2 x}{1.2}, & \frac{d^3 x}{1.2.3}, & \frac{d^4 x}{1.2.3.4} & \ldots \end{matrix}\right)$$

herbey, der sie enthält.

III. Die Arbogastische Annahme (8, 9), die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ der polynomischen Reihe als veränderlich anzusehen, und auch so zu behandeln, verstattet, die Auflösungsformel für $\frac{d^n.\varphi x}{1.2..n}$ (in II.) auch auf $\frac{d^n.\varphi \alpha}{1.2..n}$ auszudehnen, und bei der so nahen Verwandschaft der Differentiationen und Derivationen unter einander (13), die Zeichnung (33) dafür festzusetzen. Daraus ergeben sich die Werthe der *Derivées divisées* und *simples*, ausser der Ordnung, viel leichter, als auf dem gewöhnlichen Wege der successiven Differentiation (34, 35, 36).

IV. ARBOGAST nimmt ferner die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ nicht bloſs als veränderliche, fondern auch als von einander abhängige Grössen an, so unabhängig sie auch immer an sich seyn mögen. Dieser hevristischen Fiction gemäſs, werden nach geendeten Derivationen, für $\text{D}.\alpha$, $\text{D}^2.\alpha$, $\text{D}^3.\alpha, \ldots$ die zugehörigen 1β; 1.2γ; $1.2.3\delta$; ... gesezt (20) und das Exempel (37); und so findet man sich auf einmal aus φx und ihren Differentialen, in $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 +$ etc.) und ihre Evolution versetzt; in so fern nämlich die Coefficienten der zu evolvirenden leztern Function von den Differentialen der ersten sich ableiten lassen.

V. Schafft man nach ARBOGAST's Vorschrift, die $\text{D}.\alpha$; $\text{D}^2\alpha$; $\text{D}^3.\alpha \ldots$ und ihre Potenzen erst in die Formel (II) nach dem dortigen Zeiger, und substituirt dann die zugehörigen Werthe (IV) für sie, so geräth man in Weitläuftigkeit, die man vermeidet, wenn

man (38) die Substitution sogleich in den Zeiger selbst macht. Dadurch verschwinden alle derivativen Ausdrücke auf einmal, und die ganz einfachen β, γ, δ, ε... erscheinen an dem Platze ihrer Stellvertreter

$$\frac{\mathrm{D}.\alpha}{1};\ \frac{\mathrm{D}^2.\alpha}{1.2};\ \frac{\mathrm{D}^3.\alpha}{1.2.3};\ \frac{\mathrm{D}^4.\alpha}{1.2.3.4};\ldots$$

und geben so den Zeiger für die Classen $^n\!A$, $^n\!B$, $^n\!C$. . . $^n\!N$.

VI. Daraus fliefst der nicht weiter abzukürzende analytisch - combinatorische Satz (39) — eine schöne Blume, auf derivativen Boden gezogen, (20) und in combinatorischen verpflanzt, wo sie so herrlich gedeiht! —

VII. Will man die combinatorische Evolutionsformel (39) von derivativen Vorstellungen (III, IV) ganz unabhängig, so leicht und so geschwind als möglich aufstellen: so darf man nur das in (41) an- und in (42) ausgeführte directe combinatorische Verfahren befolgen. Die combinatorische Methode der Potenzen führt hier geschwinder, als jede andere zum Ziel.

VIII. Aus der Evolutionsformel (39) folgt sogleich, vermöge Substitution der Localwerthe für die Classen, die correspondirende Localformel (43).

45. Es verdient besonders bemerkt zu werden, wie man hier (44) aus den Differentialen von φx (wo dx, d^2x, d^3x, u. s. w. alle höhere Differentialen beybehalten werden) in die Coefficienten der Reihe für $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$ übergeht.

Ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential, ist (44, II)

$$\text{I. } \frac{d^n.\varphi x}{1.2..n} = \frac{d\varphi x}{1}\, \mathfrak{a}^n A + \frac{d^2\varphi x}{1.2}\, \mathfrak{b}^n B + \ldots + \frac{d^n\varphi x}{1.2..n}\, \mathfrak{n}^n N$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \frac{dx}{1}, & \frac{d^2x}{1.2}, & \frac{d^3x}{1.2.3}, & \frac{d^4x}{1.2.3.4} & \ldots \end{matrix}\right)$$

Der $(n+1)$te, zu x^n gehörige, Coefficient der Reihe für $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$ ist (39)

$$\text{II. } \frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n} = \frac{D\varphi\alpha}{1}\, \mathfrak{a}^n A + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}\, \mathfrak{b}^n B + \ldots + \frac{D^n\varphi\alpha}{1.2..n}\, \mathfrak{n}^n N$$

$$\left[\begin{matrix} D.\alpha = 1.\beta \\ D^2.\alpha = 1.2.\gamma \\ D^3.\alpha = 1.2.3\delta \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{matrix}\right]^{*)} \quad \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \ldots \end{matrix}\right)$$

Um also aus I in II überzugehen, darf man in I nur x mit α, und d mit D, vertauschen, und statt des dortigen

zusammengesetzten Zeigers $\left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \frac{d.\alpha}{1}, & \frac{d^2.x}{1.2}, & \frac{d^3.\alpha}{1.2.3} & \ldots \end{matrix}\right)$

*) Ich habe, daſs nach geendeten Differentiationen von $D^n.\varphi\alpha$, die $D.\alpha$, $D^2.\alpha$, $D^3.\alpha$... mit 1β, $1.2.\gamma$, $1.2.3\delta$, ... zu vertauschen seyen, zeigerförmig (durch eckigte Klammern) hier angegeben; denn nur unter dieser Voraussetzung findet der einfache combinatorische Zeiger unter $\mathfrak{a}^n A$, $\mathfrak{b}^n B$... statt. Ich werde jenen darstellenden derivativen Zeiger in der Folge, der Deutlichkeit und Vollständigkeit wegen, neben dem combinatorischen mit beyfügen, auch, wo es der Raum verstattet, zuweilen so schreiben:

$$\left[\begin{matrix} D.\alpha & D^2.\alpha & D^3.\alpha & D^4.\alpha & \ldots \\ 1\beta & 1.2\gamma & 1.2.3\delta & 1.2.3.4\varepsilon & \ldots \end{matrix}\right]$$

den einfachen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \mathfrak{b} & \gamma & \delta & \ldots \end{pmatrix}$ in II setzen, und die Combinationsclassen ${}^{n}A$, ${}^{n}B$, ... ${}^{n}N$ darauf beziehen: denn dadurch wird den Arbogastischen beiden Annahmen (44, III, IV.) vollkommen Genüge geleistet (44, V.).

46. Exempel, für $\varphi x = log.x$; $\varphi x = e^x$; $\varphi x = x^m$

a) für ein beständiges dx

$$\frac{d^n\, log.x}{dx^n} = \pm 1.2.3.4 \ldots (n-1)\, x^{-n}$$

$$\frac{d^n\, e^x}{dx^n} = e^x$$

$$\frac{d^n\, x^m}{dx^n} = m.m-1.m-2 \ldots (m-n+1)\, x^{m-n}$$

Für $dx = 1$, fiele hier auch $dx^n = 1$ im Divisor weg.

b) Ohne Rücksicht auf ein beständiges Differential (45, I.)

$$\frac{d^n.\, log.\, x}{1.2..n} = \frac{1}{x}\, \mathfrak{a}^n A - \frac{1}{2x^2}\, \mathfrak{b}^n B + \frac{1}{3x^3}\, \mathfrak{c}^n C - \ldots \pm \frac{1}{nx^n}\, \mathfrak{n}^n N$$

$$\frac{d^n.\, e^x}{1.2..n} = e^x\left(\mathfrak{a}^n A + \frac{\mathfrak{b}^n B}{1.2} + \frac{\mathfrak{c}^n C}{1.2.3} + \ldots + \frac{\mathfrak{n}^n N}{1.2..n}\right)$$

$$\frac{d^n.x^m}{1.2..n} = {}^m\mathfrak{A}\, x^{m-1}\, \mathfrak{a}^n A + {}^m\mathfrak{B}\, x^{m-2}\, \mathfrak{b}^n B + {}^m\mathfrak{C}\, x^{m-3}\, \mathfrak{c}^n C + {}^m\mathfrak{D}\, x^{m-4}\, \mathfrak{d}^n D + \ldots + {}^m\mathfrak{N}\, x^{m-n}\, \mathfrak{n}^n N)$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots \\ \frac{d.x}{1}, & \frac{d^2.x}{1.2}, & \frac{d^3.x}{1.2.3}, & \frac{d^4.x}{1.2.3.4}, & \ldots \end{pmatrix}$$

Nämlich, statt φx (in 45, I.) nach und nach log. x; e^x; x^m gesetzt, und, was diese Substitution giebt, für $dx = 1$ differentiirt.

c) Wenn man aus φx in die Coefficienten der zu evolvirenden Function

$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$ übergeht (45, II.)

$$\frac{D^n.\log.\alpha}{1.2..n} = \frac{1}{\alpha}\,\mathfrak{a}^n A - \frac{1}{2\alpha^2}\,\mathfrak{b}^n B + \frac{1}{3\alpha^3}\,\mathfrak{c}^n C - \ldots \pm \frac{1}{n\alpha^n}\,\mathfrak{n}^n N$$

$$\frac{D^n.e^\alpha}{1.2..n} = e^\alpha \left(\frac{\mathfrak{a}^n A}{1} + \frac{\mathfrak{b}^n B}{1.2} + \frac{\mathfrak{c}^n C}{1.2.3} + \ldots + \frac{\mathfrak{n}^n N}{1.2..n}\right)$$

$$\frac{D^n.\alpha^m}{1.2..n} = {}^m\mathfrak{A}\,\alpha^{m-1}\,\mathfrak{a}^n A + {}^m\mathfrak{B}\,\alpha^{m-2}\,\mathfrak{b}^n B + {}^m\mathfrak{C}\,\alpha^{m-3}\,\mathfrak{c}^n C + \ldots + {}^n\mathfrak{N}\,\alpha^{m-n}\,\mathfrak{n}^n N$$

$$\left[\begin{array}{l} D.\ \alpha = 1\beta \\ D.^2\alpha = 1.2\gamma \\ D.^3\alpha = 1.2.3\delta \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}\right] \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \ldots \end{pmatrix}$$

Hier darf man (in *b*) nur α statt x, und statt des dortigen zusammengesetzten combinatorischen Zeigers, den hiesigen einfachen setzen, der sich zugleich auf den derivativen Zeiger (Note *v*) bezieht. Die ersten beiden Formeln (in *c*) zeigen sich in der Anwendung am einfachsten; die letzte dagegen kommt bei weitem am häufigsten im Gebrauche vor.

Für $\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n}$, was bey ARBOGAST und auch hierin der Folge oft vorkommt, darf man nur überall, in der Formel und den untergesetzten beyden Zeigern

statt $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon \ldots$

setzen $\beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta \ldots$

47. Die Reihen (46, *c*) sind lauter $(n+1)$te, zu x^n gehörige, Coefficienten $[\varkappa(n+1)$ oder A_n in $(39)]$ der zu evolvirenden Functionen:

$$\log(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.})\ [\text{no. } 12]$$

$$e^{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.}}\ [\text{no. } 14]$$

$$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.})^m\ [\text{no. } 31]$$

und zwar, im letzten Falle, für jeden Werth von m, ganzen und gebrochenen, positiven und negativen.

Exempel für einen bestimmten Werth von n

48. In (46, *c*) sey $n = 4$ und m bleibe unbestimmt, so ist

$${}^4A = 4 = \varepsilon$$

$${}^4B = \binom{13}{22} = \binom{\beta\delta}{\gamma^2}$$

$${}^4C = 112 = \beta^2\gamma$$

$${}^4D = 1111 = \beta^4$$

$$\begin{pmatrix}\beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$${}^m\mathfrak{A} = m$$

$${}^m\mathfrak{B} = \frac{m.m-1}{1.2}$$

$${}^m\mathfrak{C} = \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$$

$${}^m\mathfrak{D} = \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}$$

Demnach sind die $\varkappa(4+1)$ oder die 5ten Coefficienten der Reihen (47)

oder $\log.(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.})\,\varkappa\,5$

$$=$$

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}-\frac{2\beta\delta+\gamma^2}{2\alpha^2}+\frac{3\beta^2\gamma}{3\alpha^3}-\frac{\beta^4}{4\alpha^4};$$

ferner $(e^{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.}})\,\varkappa\,5$

$$=$$

$$e^{\alpha}\left(\varepsilon + \frac{2\beta\delta + \gamma^2}{1.2} + \frac{3\beta^2\gamma}{1.2.3} + \frac{\beta^4}{1.2.3.4}\right);$$

und $(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc})^m x 5$

$$=$$

$$m\alpha^{m-1}\varepsilon + \frac{m.m-1}{1.2}\alpha^{m-2}(2\beta\delta+\gamma^2)$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\alpha^{m-3}.3\beta^2\gamma$$
$$+ \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}\alpha^{m-4}\beta^4.$$

Die Vergleichung dieser Exempel mit denen in (25, 26, 27) zeigt die schnelle Wirksamkeit der combinatorischen Evolutionsformel (39) augenscheinlich.

Weil sich die rein-combinatorischen Operationen für die Classen ${}^nA$, ${}^nB$, ${}^nC$. . . in Zahlen und Buchstaben gleich leicht, und von einander unabhängig, darstellen lassen, so habe ich sie hier, für $n=4$, beyde aufgeführt.

49. Andere Formeln von Pfaff (Samml. II a. a. O.) für $\frac{d^n.\sin x}{1.2..n}$, $\frac{d^n.\cos.x}{1.2..n}$, $\frac{d^n.\tan g\ x}{1.2..n}$, $\frac{d^n.\cot.x}{1.2.n}$, $\frac{d^n.\sec.x}{1.2..n}$, $\frac{d^n.\operatorname{cosec}.x}{1.2..n}$, $\frac{d^n.A\sin x}{1.2..n}$, $\frac{d^n.A\cos x}{1.2..n}$, $\frac{d^n.A\tan g.x}{1.2..n}$, $\frac{d^n.A\cot x}{1.2..n}$; um aus φx in $\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$, aus (45, I in II) überzugehen. Die Polynomialgrössen a^nA, b^nA, c^nC . . . oder ihre Stellvertreter pxn, $p^2x(n-1)$, $p^3x(n-2)$. . . (43), bleiben dabei immer dieselben, nur die $\frac{D\varphi\alpha}{1}$, $\frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}$, $\frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}$. . . ändern sich nach Verschiedenheit der Function verschiedentlich ab (40).

50. Von den vielfachen Anwendungen der allgemeinen combinatorischen Differenzialformel $\frac{D^n . \varphi\alpha}{1.2..n}$ = (45, II) sind die für $\varphi\alpha = \log.\alpha$ und für $\varphi\alpha = \alpha^m$ (46, c), besonders die letztere, in Beziehung auf die dortigen Bedeutungen und Zeiger, bey weitem die wichtigsten. Die beiden Arbogastischen Annahmen führen darauf (44, III, IV) und erhöhen dadurch den Nutzen der Pfaffischen Aufgabe ungemein. Die combinatorischen Classenzeichen beziehen sich auf den ganz einfachen Zeiger $\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta & \ldots \\ 1, & 2, & 3 & \ldots \end{pmatrix}$ und geben so den Formeln in Absicht auf Darstellung und Anwendung, die gröfste Vollendung (44, V). Zunächst, und so auch in der Folge, wird häufig $\frac{D^n . \beta^m}{1.2..n}$ (46, c) vorkommen. In diesem Falle wird nehmlich β^m, wie vorher α^m, als *Origine des Dérivations* (24) angesehen.

51. Die derivative Function $\frac{D^n . \beta^m}{1.2..n}$ spielt in dem Arbogastischen Werke eine grofse Rolle, und kommt darinn sehr häufig vor. Ich will daher die verschiedenen Bedeutungen, die dieser Ausdruck nach verschiedenen Ansichten, die dabey statt finden, haben kann, hier angeben. Arbogast selbst hat sich darüber ausführlich erklärt [no. 52 — 54]. Diesen Erklärungen werde ich noch einige Bemerkungen und Erläuterungen beyfügen.

52. Die Bezeichnung $\frac{D^n . \beta^m}{1.2..n}$ und andere ähnliche Ausdrücke, so einfach sie auch an sich sind, weil dabey blofs das besondere Zeichen D vorkommt, haben gleichwohl verschiedene Bedeutungen.

I. Sie sind Zeichen von Derivationen. So z. B. drücken $\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$ und $\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n}$, durch D^n, eine Reihe von Operationen aus, die man auf φx oder β^m anwenden soll, die sämmtlich dasselbe Gesetz befolgen, und n mal wiederholt werden müssen; überdies zeigen sie, durch das Verhalten des D zu dem Differenzialzeichen d, die Natur dieses Gesetzes an, oder die Art von Derivation, welche der vorliegende Ausdruck erfordert (11, 12, 13).

Beyspiele von $\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$, für bestimmte n (17); allgemeine Evolutionsformel dafür, durch Beyhülfe combinatorischer Zeichen (33, 34); Wegen $\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n}$ vergleiche man (46. b) nur statt der dortigen d, x, hier D, β gesetzt. Dieselbe Formel (aber für z^m statt β^m) kommt schon im Arch. der Mathem. H. II. S. 230; 7, 8 vor.

II. Sie sind Zeichen von Coefficienten; und weisen nicht blofs die Zahl des Gliedes zu dem sie gehören, sondern auch die Beschaffenheit der Function des Polynoms nach, von welcher das Glied, dessen Coefficient verlangt wird, ein Theil ist.

Es sey $\beta+\gamma x+\delta x^2+\varepsilon x^3+\zeta x^4+$ etc. $=p$, so drückt

$$\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n}=\frac{p^m\,\kappa\,(n+1)}{p(\beta,\gamma,\delta\,...)}$$

1) den Coefficienten des $(n+1)$sten, zu x^n gehörigen, Gliedes (den $(n+1)$ten Coefficienten) der Potenz m von $\beta+\gamma x+\delta x^2+$ etc. aus.

2) Werden dadurch zugleich, die Function β^m, und die darauf anzuwendenden Operationen D^n für den gesuchten Coefficienten $p^m\,\kappa\,(n+1)$ angegeben.

Anmerk. 1. (zu I. II) In der Formel (I) ist β^m nur ein einzelnes Glied (*Monomium*); in (II) wird aber eine ganze Reihe durch dieses *Monomium* ausgedrückt. So z. B. bedeutet $\frac{D^4 . \beta^m}{1.2.3.4}$ (in II) den 5ten, zu x^4 gehörigen Coefficienten der Potenz $(\text{б} + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.})^m$, oder den Coefficienten E, wie er (in 25) gefunden worden ist; nur statt der dortigen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, hier $\text{б}, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ gesetzt. Eben so zeigt $\frac{D^{10}. \sin. \gamma}{1.2..10}$ den Coefficienten des 11ten Gliedes der zu entwickelnden Function $\sin (\gamma + \delta x + \varepsilon x^2 + \text{etc.})$ an, welche hier blofs durch das *Monom*, $\sin \gamma$ vorgestellt wird. Dafür dienen in der combinatorischen Zeichnung die Scalen $p [\text{б}, \gamma, \delta \ldots]$ und $q [\gamma, \delta, \varepsilon \ldots]$ etc.

Anmerk. 2. Noch ein anderer sehr bedeutender Unterschied findet zwischen den β^m in (I und II) statt, dafs nähmlich im letzten Falle die gegebenen, von einander ganz unabhängigen, Coefficienten $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ der Reihe p (II) als veränderlich und von einander abhängig (8, 9) von Arbogast angesehen und behandelt werden. Diese Voraussetzung macht daher nach geendeten Differentiationen, bestimmte Substitutionen in $D . \beta$; $D^2 . \beta$; $D^3 . \beta \ldots$ nöthig (20), die man am schicklichsten der derivativen Function in Form eines Zeigers untersetzen kann, wie oben (46, c). Man vergleiche (45, II) und die dortige Note.

Anmerk. 3. Das m in (I und II) kann jede Zahl, positive und negative, ganze und gebrochene, bedeuten; die Formeln in (46; *b*, *c*) sind nämlich für jeden Werth von m anwendbar. Setzt man aber das m in II einer ganzen positiven Zahl gleich: so giebt das die von Arbogast sogenannten *quantités polynomiales* (40), die Coefficienten nehmlich der entwickelten

Potenzen ganzer positiver Exponenten der Polynomieu.

Anmerk. 4. Für bejahte positive m gilt ausser dem (Anm. 3) angeführten combinatorischen Werthe für $\frac{D^n . \beta^m}{1.2..n}$, auch nachfolgende verkürzte Formel:

$$\frac{D^n . \beta^m}{1.2..n} = p^m \varkappa (n+1) = \mathfrak{m}^{m+n} M$$

$$\left(\begin{array}{l} D . \beta = 1 \gamma \\ D^2 . \beta = 1.2 \delta \\ D^3 . \beta = 1.2.3 \varepsilon \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}\right) p[\beta, \gamma, \delta ..] \left(\begin{array}{l} \beta, \gamma, \delta, \varepsilon ... \\ 1, 2, 3, 4 ... \end{array}\right)$$

wo für $m = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \; . \; . \; .$

dann $M = A \quad B \quad C \quad D \; . \; . \; .$

und $\mathfrak{m} = \mathfrak{a} \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{c} \quad \mathfrak{d} \; . \; . \; .$

zu setzen. Arch. der Math. Heft II. S. 230, 231.

III. Die Polynomialgrössen

$$D\,\mathfrak{G}^m, \frac{D^2 . \mathfrak{G}^m}{1.2}, \frac{D^3 . \mathfrak{G}^m}{1.2.3} \; . \; . \; . \; . \; \frac{D^n . \mathfrak{G}^m}{1.2..n}$$

lassen sich endlich auch als Zeichen von Combinationen betrachten. Arbogast bemerkt dieses [no. 54, 4°], behauptet aber [no. 52] die combinatorische Behandlung und Auflösung dieser Zeichen (z. B. nach den Formeln hier, Anmerk. 4; in 46, *b*, *c*; und andern) sey weniger leicht und weniger analytisch als die derivative. Diesen Ausspruch gehörig zu prüfen, darf man nur die bereits vorgelegte combinatorische Evolutionsformel (39) und ihre Anwendung, mit der sogleich aufzuführenden, die Polynomialgrössen enthaltenden, derivativen Formel (53) und ihrem Gebrauche vergleichen.

VIERTER ABSCHNITT.

Arbogast's zweyte, die Polynomialgrössen enthaltende, derivative Auflösungsformel des Hauptproblems (20), aus der combinatorischen Localformel (43 und 52, II) abgeleitet.

53. Die von Arbogast [no. 20] vorgetragene zweyte Evolutionsformel ist folgende:

$$\text{I.}\quad \varphi(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\text{etc.})$$

$$=$$

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{etc.}+\mathcal{A}_n x^n$$

$$=\varphi\alpha$$

$$+\frac{D\varphi\alpha}{1}.\beta x$$

$$+\left(\frac{D\varphi\alpha}{1}D.\beta+\frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\beta^2\right)x^2$$

$$+\left(\frac{D\varphi\alpha}{1}.\frac{D^2.\beta}{1.2}+\frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.D.\beta^2+\frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\beta^3\right)x^3$$

$$+\left(\frac{D\varphi\alpha}{1}.\frac{D^3.\beta}{1.2.3}+\frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{D^2.\beta^2}{1.2}+\frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}.D.\beta^3+\frac{D^4\varphi\alpha}{1.2.3.4}\beta^4\right)x^4$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\text{also } \mathcal{A}_n x^n=\left(\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}\right)=\frac{D\varphi\alpha}{1}.\frac{D^{n-1}.\beta}{1.2..n-1}+\frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{D^{n-2}.\beta^2}{1.2..n-2}+\frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\frac{D^{n-3}.\beta^3}{1.2..n-3}+\text{etc.}$$

$$+\frac{D^n\varphi\alpha}{1.2..n}.\frac{D^{n-n}.\beta^n}{1.2..n-n}+\text{etc.})\,x^n$$

für den derivativen Zeiger:

$$\left[\begin{matrix} \mathrm{D}.\mathfrak{G}, & \mathrm{D}^2.\mathfrak{G}, & \mathrm{D}^3.\mathfrak{G}, & \mathrm{D}^4.\mathfrak{G}, & \mathrm{D}^5.\mathfrak{G}, & \ldots \\ 1\gamma, & 1.2\delta, & 1.2.3\varepsilon, & 1.2.3.4\zeta, & 1.2.3.4.5\eta, & \ldots \end{matrix}\right]$$

Der hier beygefügte derivative Index zeigt nehmlich, was nach geendeten Derivationen, durch Differentiation, bey den Polynomialgrössen $\frac{\mathrm{D}^n.\mathfrak{G}^m}{1.2..n}$ (51, III) statt der $\mathrm{D}^1.\mathfrak{G}$, $\mathrm{D}^2.\mathfrak{G}$, $\mathrm{D}^3.\mathfrak{G}\ldots$ zu setzen sey (45, II. Note). Auch ist $\frac{\mathrm{D}^{n-n}.\mathfrak{G}^n}{1.2..n-n}$ d. i. $\frac{\mathrm{D}^0.\mathfrak{G}^n}{0} = \mathfrak{G}^n$.

II. Ordnete man die Glieder der Coefficienten, wie sie kommen würden, wenn man die hiesigen rückwärts schriebe, so fände man A_n oder

$$\frac{\mathrm{D}^n.\varphi\alpha}{1.2..n} = \frac{\mathrm{D}^n\varphi\alpha}{1.2..n}.\mathfrak{G}^n + \frac{\mathrm{D}^{n-1}\varphi\alpha}{1.2..n-1}.\mathrm{D}.\mathfrak{G}^{n-1} + \ldots$$
$$+\mathrm{D}\varphi\alpha\,\frac{\mathrm{D}^{n-1}.\mathfrak{G}}{1.2..n-1}$$

diese derivativen Ausdrücke von $\mathfrak{G}^n, \mathfrak{G}^{n-1}$ in combinatorische umzusetzen, dürfte man nur die zugehörigen $\mathfrak{a}^n\mathrm{A}, \mathfrak{b}^n\mathrm{B}, \mathfrak{c}^n\mathrm{C}, \ldots \mathfrak{n}^n\mathrm{N}$ (56, III) rückwärts schreiben.

54. Beweis. Die Formel (52, II)

$$\frac{p^m n(n+1)}{p[\beta, \gamma, \delta..]} = \frac{\mathrm{D}^n.\mathfrak{G}^m}{1.2..n}$$

wenn man darinn

für	nach und nach
$m=1$	$n=0, 1, 2, 3, 4\ldots$
$m=2$	$n=0, 1, 2, 3, 4\ldots$
$m=3$	$n=0, 1, 2, 3, 4\ldots$
.	

setzt, giebt:

$p^1 \varkappa 1 = \mathfrak{b}$	$p^2 \varkappa 1 = \mathfrak{b}^2$	$p^3 \varkappa 1 = \mathfrak{b}^3$	etc.
$p^1 \varkappa 2 = \mathrm{D}.\mathfrak{b}$	$p^2 \varkappa 2 = \mathrm{D}.\mathfrak{b}^2$	$p^3 \varkappa 2 = \mathrm{D}.\mathfrak{b}^3$	etc.
$p^1 \varkappa 3 = \frac{\mathrm{D}^2.\mathfrak{b}}{1.2}$	$p^2 \varkappa 3 = \frac{\mathrm{D}^2.\mathfrak{b}^2}{1.2}$	$p^3 \varkappa 3 = \frac{\mathrm{D}^2.\mathfrak{b}^3}{1.2}$	etc.
$p^1 \varkappa 4 = \frac{\mathrm{D}^3.\mathfrak{b}}{1.2.3}$	$p^2 \varkappa 4 = \frac{\mathrm{D}^3.\mathfrak{b}^2}{1.2.3}$	$p^3 \varkappa 4 = \frac{\mathrm{D}^3.\mathfrak{b}^3}{1.2.3}$	etc.
, ,	, ,	, ,	etc.

und so kommt, diese derivativen Ausdrücke an die Stelle der gleichgültigen localen, in die Localformel (43) substituirt, die Evolutionsformel (53). Die Vergleichung dieser Formel mit der combinatorischen (39) zeigt das Verhalten der derivativ- und combinatorisch ausgedrückten Polynomialgrössen mit einem Blick. Die allgemeine Formel dafür steht (52, II, Anmerk. 4); eine weitere Zerlegung der letztern (46, *c*).

55. Einen andern Beweis von dem Satze (53) vermöge der derivativ ausgedrückten Werthe der Potenzen p^1, p^2, p^3, p^4 . . . (54) und der Substitution dieser Werthe in die einzelnen Glieder der Taylorischen Evolutionsformel, hat ARBOGAST (no 21) gegeben. Dieses Verfahren stimmt im Wesentlichen mit dem meinigen (in 42) überein, nur dafs bey mir combinatorische Ausdrücke statt derivativer gebraucht werden, auch das dabey angewendete Verfahren (*Methodus potentiarum*) die weitläuftige Substitution und Reduction ersparen hilft, und so die Glieder in (53) gleich gut geordnet giebt. Die derivative Form ist nämlich wenn man davon Gebrauch in der Anwendung machen will, keiner so unmittelbar leichten Auflösung fähig, als die combinatorische; obschon in [no. 52] das Gegentheil versichert wird. Mehr davon, im 6ten Abschnitte.

56. I. In dem Satze (53) kommen zweyerley derivativ ausgedrückte Gröfsen vor; die, von der Function $\varphi\alpha$ abhängigen successiven ganz einfachen Derivationen $\frac{D^n \varphi\alpha}{1,2..n}$ (ohne Punct nach D^n) für $D\alpha = 1$, also $D^2\alpha = D^3\alpha$, u. s. w. $= 0$; und die weit verwickeltern $\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n}$ (mit einem Puncte nach D^n), wo $D.\beta$; $D^2.\beta$; $D^3.\beta$; . . . und alle höhere Differentiale zugelassen werden (16). Die Werthe dieser Polynomialgrössen für bestimmte n und m, durch wirkliche successive Differentiation und Substitution der zugehörigen Werthe für die $D.\beta$, $D^2.\beta$, $D^3.\beta$... (nach dem Zeiger in 53) suchen wollen, würde zu verdrüfslichen und unübersehlichen Weitläuftigkeiten führen (17).

II. Wie sich diese Schwierigkeiten, durch den Gebrauch combinatorischer Zeichen und Operationen beträchtlich vermindern lassen, zeigt die Formel (44, II) wenn man darinn β^m statt φx, und in den Zeiger, β statt x setzt. Auch wird (in V. a. a. O.) gewiesen, wie man durch eine schickliche Substitution der Werthe für $D.\beta$: $D^2.\beta$; $D^3.\beta$. . ., nicht in die Formel, sondern in den Zeiger, die Schwierigkeiten ganz aufheben könne. Dadurch wird man auf die combinatorische Formel (39) geleitet.

III. Man kann das auch so (ohne jene Sätze) in der Kürze übersehen. Man setze in die Gleichung (Arch. d. Math. H. II. S. 230, 231, §. 7 und 8, II) überall D, β statt d, z, so erhält man

$$\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n} = {}^{m+n}_{\ m}M \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \beta, & \frac{D.\beta}{1}, & \frac{D^2.\beta}{1.2}, & \frac{D^3.\beta}{1.2.3}, & \ldots \end{matrix} \right)$$

den combinatorischen Ausdruck für die n^{te} *Derivée divisée* (34) $\frac{D^n.\beta^m}{1.2..n}$, oder das n^{te} Differential von β^m,

durch $1.2..n$ dividirt, worinn $\mathfrak{m}$ und M allgemeine m^{te} Polynomialcoefficienten und Classen bedeuten; also (wie in 52, II, Anm. 4)

für $m = 1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots$
dann $M = A,\ B,\ C,\ D\ \ldots$
und $\mathfrak{m} = \mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d}\ \ldots$

Nun setze man

für	n	m	so findet man dadurch
erstens	$n-1$	1	$\frac{D^{n-1}.\ \beta}{1.2..n-1} = \mathfrak{a}^n A$
zweytens	$n-2$	2	$\frac{D^{n-2}.\ \beta^2}{1.2..n-2} = \mathfrak{b}^n B$
drittens	$n-3$	3	$\frac{D^{n-3}.\ \beta^3}{1.2..n-3} = \mathfrak{c}^n C$
viertens	$n-4$	4	$\frac{D^{n-4}.\ \beta^4}{1.2..n-4} = \mathfrak{d}^n D$
:	:	:	: : :
ntens	$n-n$	n	$\frac{D^{n-n}.\ \beta^n}{1.2..n-n} = \mathfrak{n}^n N$

wo also auch die

$$\mathfrak{a}^n A \quad \mathfrak{b}^n B \quad \mathfrak{c}^n C \quad \mathfrak{d}^n D \ldots \mathfrak{n}^n N$$

auf den Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & ,\ldots \\ \beta, & \frac{D.\beta}{1}, & \frac{D^2.\beta}{1.2}, & \frac{D^3.\beta}{1.2.3}, & \frac{D^4.\beta}{1.2.3.4}, & \ldots \end{pmatrix}$$

sich beziehen und dadurch sich ausdrücken lassen. Auch ist $\mathfrak{n}^n N = \frac{D^0\ \beta^n}{0} = \beta^n$.

IV. Das giebt alle Bequemlichkeit, die man nur wünschen kann, in so fern β^m ein bloſses *Monomium* ist. Steht aber nach Arbogast's Zeichnung und Bedeutung (52, II, Anm. 1) β^m für $(\beta + \gamma x + \delta x^2 + \text{etc.})^m$, so tritt hierbey zugleich die Nothwendigkeit der Sub-

stitution von 1γ; 1.2δ; $1.2.3\varepsilon$;... für $D.\beta$; $D^2.\beta$; $D^3.\beta$; ... (das. Anm. 2) ein; und so würde man in grofse Weitläuftigkeit verfallen, wenn man diese Differentiale, nach obigem Zeiger, zuerst in $\mathfrak{a}^n A$, $\mathfrak{b}^n B$, $\mathfrak{c}^n C$,... schaffen, und nachher jene Substitution darinn vornehmen wollte. Man macht diese Substitution vielmehr in jenen Zeiger selbst, und erhält dadurch

$$\mathfrak{a}^n A \quad \mathfrak{b}^n B \quad \mathfrak{c}^n C \quad \mathfrak{d}^n D \quad \ldots \quad \mathfrak{n}^n N$$

auf den ganz einfachen Zeiger

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \end{pmatrix}$$

bezogen. Man vergleiche die Formel (52, II, Anm. 4)

V. Die $\mathfrak{a}^n A$, $\mathfrak{b}^n B$, $\mathfrak{c}^n C$, ... für diesen einfachen Zeiger, kommen in der Formel (45; II) für den $(n+1)$ten Coefficienten der Reihe für $\varphi(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\text{etc.})$, vor. Setzt man darinn nach und nach $n=1,2,3,4,..$ so erhält man die combinatorische Formel (39); und so auch die derivative (53) wenn man diese successiven Werthe von n, in das n der derivativen Ausdrücke (III) setzt. Die combinatorische Evolutionsformel läfst sich nicht weiter simplificiren, weil bey der übergrofsen Leichtigkeit der Darstellung der Complexionen von $\mathfrak{a}^n A$, $\mathfrak{b}^n B$, $\mathfrak{c}\, C$, ... nichts zu wünschen übrig bleibt. Man sehe den ersten Anhang.

V. Es ist übrigens bemerkenswerth, dafs die Vermeidung der Schwierigkeiten, welche die derivativen Ausdrücke, durch continuirliche Differentiationen, auf welche sie hinweisen, hier in den Weg stellen, so gerade zu und ungezwungen auf combinatorische Verfahren führt; eine Bemerkung, die weiterhin von einer andern Seite neue Bestätigung erhalten wird.

FÜNFTER ABSCHNITT.

*Arbogast's Auflösung seiner derivativen Evolutionsformel (53) führt auf Substitutionen. Die Weitläuftigkeit dieses, von Tetens schon gebrauchten, Verfahrens wird aber zuletzt durch kurze, daraus abgeleitete, verbale Vorschriften (*Règles*) rein combinatorischen Inhalts wieder compensirt, und so die letztern statt der erstern gebraucht. Einige gemeinschaftliche Berührungspuncte des Derivationscalculs mit der combinatorischen Analysis.*

57. Wie in der combinatorischen Analysis 1) spätere oder folgende Glieder und Coefficienten, aus frühern, unmittelbar vorhergehenden, sich ableiten, oder 2) für sich und ausser der Ordnung, von allen übrigen vorhergehenden (oder folgenden) unabhängig darstellen, und zwar, in beyden Fällen, bereits ganz reducirt und in der einfachsten Gestalt, anordnen lassen (29 und die dortige Note q): so hat auch Arbogast diese Vollendung auf derivativen Wegen bey dem Gebrauche seiner Formel (53) zur Absicht gehabt. [no. 24. u. f. no. 40 u. f.]

A) *Derivative Ableitung folgender Coefficienten aus zunächst vorhergehenden, und umgekehrt.*

58. I. Dafür wird zuerst [no 24] eine leichte Regel aufgestellt, wie man aus einem gegebenen Coefficienten der Reihe (53) z. B. aus

$$\frac{\text{D}\varphi\alpha}{1}\cdot\frac{\text{D}^2.\,6}{1\,.\,2}+\frac{\text{D}^2\varphi\alpha}{1\,.\,2}\,.\,\text{D}.\,6^2+\frac{\text{D}^3\varphi\alpha}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,6^3$$

den unmittelbar folgenden

$$\frac{D\,\varphi\alpha}{1}\cdot\frac{D^3.\,\mathfrak{G}}{1.2.3}+\frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}\cdot\frac{D^2.\,\mathfrak{G}^2}{1.2}+\frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}\cdot D.\,\mathfrak{G}^3$$
$$+\frac{D^4\varphi\alpha}{1.2.3.4}\,\mathfrak{G}^4$$

und so für jeden andern gegebenen Coefficienten den zunächst folgenden, deriviren könne.

II. In diesen Formeln machen die von $\varphi\alpha$ abhängigen einfachen Derivationen $\frac{D^n\varphi\alpha}{1.2..n}$ keine Schwierigkeit, wohl aber die verwickelten Polynomialgrößsen $\frac{D^n.\,\mathfrak{G}^m}{1.2..n}$; wobey man durch fortgesetzte Differentiationen, und hinterher zu machende Substitutionen (56. I.) in verdrüfsliche und gar bald unübersehliche Weitläuftigkeiten gerathen würde. Wie sich diese Schwierigkeiten durch combinatorische Zeichnung und Verfahren gründlich heben lassen, ist ebendaselbst (II — V) gezeigt worden. ARBOGAST, der von combinatorischen Zeichen ganz abstrahirt, hat sich dabey verhalten, wie folget.

III. Die Polynomialgröfsen, die $\mathfrak{G}$ enthalten, zu entwickeln, vergleiche man ihren allgemeinen Ausdruck $\frac{D^n.\,\mathfrak{G}^m}{1.2..n}$, mit jenem $\frac{D^n.\,\varphi\alpha}{1.2..n}$. Hier nun steht $\mathfrak{G}$ statt α, der Exponent m statt des Functionalzeichens φ, und $\gamma = D.\,\mathfrak{G}$ ist als das erste Glied des Polynoms $\gamma+\delta x+\varepsilon x^2+$ etc. anzusehen; und so folgt aus (53, I) diese erste Evolutions-Formel

$$\frac{D^n.\,\mathfrak{G}^m}{1.2..n}=D\,\mathfrak{G}^m.\,\frac{D^{n-1}.\,\gamma}{1.2..n-1}+\frac{D^2\mathfrak{G}^m}{1.2}\cdot\frac{D^{n-2}.\,\gamma^2}{1.2..n-2}+\text{etc.}$$
$$+\frac{D^{n-1}\,\mathfrak{G}^m}{1.2..n-1}.\,D.\,\gamma^{n-1}+\frac{D^n.\,\mathfrak{G}^m}{1.2..n}\,\gamma^n$$

und, in dem besondern Falle, für $n=3$, ist

$$\frac{D^3.\mathfrak{G}^m}{1.2.3} = D\mathfrak{G}^m.\frac{D^2.\gamma}{1.2} + \frac{D^2\mathfrak{G}^m}{1.2}.D.\gamma^2 + \frac{D^3\mathfrak{G}^m}{1.2.3}.\gamma^3$$

und die *Derivée* davon [no. 24]

$$\frac{D^4.\mathfrak{G}^m}{1.2.3.4} = D\mathfrak{G}^m.\frac{D^3.\gamma}{1.2.3} + \frac{D^2\mathfrak{G}^m}{1.2}.\frac{D^2.\gamma^2}{1.2}$$
$$+ \frac{D^3\mathfrak{G}^m}{1.2.3}.D.\gamma^3 + \frac{D^4\mathfrak{G}^m}{1.2.3.4}.\gamma^4$$

In dem obigen Werthe der schwierigen Derivation $\frac{D^n.\mathfrak{G}^m}{1.2..n}$, sind nun die Derivationen, die $\mathfrak{G}$ enthalten, $D\mathfrak{G}^m$, $\frac{D^2\mathfrak{G}^m}{1.2}$, $\frac{D^3\mathfrak{G}^m}{1.2.3}$, ... alle leicht, und die Schwierigkeit ist auf die, die γ enthalten, $\frac{D^{n-1}.\gamma}{1.2..n-1}$, $\frac{D^{n-2}.\gamma^2}{1.2..n-2}$, ... übergetragen, aber auch da schon um einen Grad vermindert, weil darunter $\frac{D^{n-1}.\gamma}{1.2..n-1}$ die höchste ist.

IV. Eben so kann man, durch Vergleichung mit der Formel (III) vermöge einer daraus abgeleiteten zweyten Evolution, die $\frac{D^{n-1}.\gamma}{1.2..n-1}$, $\frac{D^{n-2}\gamma^2}{1.2..n-2}$, ... weiter in Derivationen, die γ und δ enthalten, zerlegen, wo die $D\gamma^m$, $\frac{D^2\gamma^m}{1.2}$, ... alle leicht, und die Schwierigkeiten, auf die die δ enthalten, wieder mit Verminderung eines Grades (die höchste Derivation ist dann $\frac{D^{n-2}.\delta}{1.2..n-2}$) übergetragen sind; und durch diese stufenweise Verminderung werden endlich die Schwierigkeiten ganz aufgelöset.

V. Überhaupt stellt die obige Reductionsformel für $\frac{D^n.\mathfrak{G}^m}{1.2..n}$ in (III) die erste Evolution, in γ dar;

daraus folgt (IV) die zweyte, in δ; und so die dritte, in ε; und die vierte, in ζ; u. s. w. indem man nach und nach γ, δ, ε, ζ ... statt β; und δ, ε, ζ, η ... statt γ dabey braucht, und γ, δ, ε, ζ ... nach und nach als erste Glieder eines nach Potenzen einer veränderlichen Gröſse fortgehenden Polynoms betrachtet.

VI. Erste Evolution wird diejenige genannt, in welcher ein Buchstabe mehr vorkommt, als in der zu evolviren gegebenen Gröſse, wie oben die Derivation $\frac{D^n \, \beta^m}{1 \cdot 2 \cdot\cdot n}$, worinn nur β vorkommt, durch Derivationen, worinn β und γ vorkommen, ausgedrückt wird. Eben so werden zweyte, dritte, vierte Evolution u. s. w. genannt, die zwey, drey, vier u. s. w. mit dem Zeichen D verbundene Buchstaben mehr enthalten. So wird man nach und nach von einer Evolution zur andern geleitet, wo immer mehr solcher Buchstaben zum Vorschein kommen, bis man, durch alle hindurch, endlich zur letzten gelangt, in welcher kein Buchstabe mehr mit dem Derivations - Zeichen D behaftet ist, sondern alles in β, γ, δ, ε, ζ ... in der einfachsten Gestalt und zugleich gut geordnet, ausgedrückt erscheint; weshalb diese Entwickelung auch die vollständige, ganz reducirte (*Développement complet, réduit*), genannt wird [no. 25]. Sie ist dieselbe, dem Ausdrucke und der Folge ihrer Glieder nach, auf welche die combinatorischen $\mathfrak{a}^n A$, $\mathfrak{b}^n B$, $\mathfrak{c}^n C$... geradezu, ohne alle Umwege, führen.

VII. Die Evolution der Polynomialgröſsen $\frac{D^n . \beta^m}{1 \cdot 2 \cdot\cdot n}$, $\frac{D^l . \gamma^m}{1 \cdot 2 \cdot\cdot l}$ hört mit dem Gliede auf, in welchem der zweyte Factor von dem Derivations - Zeichen D befreyt ist. So ist von $\frac{D^3 . \beta^6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ das letzte Glied der Evolution, $\frac{D^3 \; \beta^6}{1 \cdot 2 \cdot 3} . \gamma^3$, und von der zu evolvirenden Gröſse

$\frac{D^4 . \gamma^6}{1.2.3.4}$ das letzte Glied, $\frac{D^4 \gamma^6}{1.2.3.4} . \delta^4$. Ferner

$\frac{D^m \beta^m}{1.2..m} = \frac{D^m \gamma^m}{1.2..m} =$ etc. $= 1$; auch $D\beta = D\gamma = D\delta$

$= D\varepsilon =$ etc. $= 1$; ingleichen $\frac{D^n . \gamma}{1.2..n} = \frac{D^{n-1} . \delta}{1.2..n-1} =$ etc.

folglich z. B. $\frac{D^4 . \gamma}{1.2.3.4} = \frac{D^3 . \delta}{1.2.3} = \frac{D^2 . \varepsilon}{1.2} = D . \zeta = \eta$ [no. 26]

VIII. So weicht ARBOGAST den schwierigen continuirlichen Differentiationen, auf welche die Ausdrücke $\frac{D^n . \beta^m}{1.2..n}$ hinweisen, [no. 17; 56, I] durch continuirliche, von der Reductionsformel (III) abhängige, Substitutionen aus, durch deren mehrmalige, nicht selten sehr vielfache, Anwendung man endlich zu ganz einfachen vollständig reducirten und gut geordneten Ausdrücken (Complexionen) gelangt (VI). In der Tafel zuletzt im zweyten Anhange dieser Abhandlung [auch no. 27. p. 20, 21] findet man der Gröfsen $\frac{D^5 . \beta^4}{1.2..5}$ und $\frac{D^6 . \beta^4}{1.2..6}$ successive Entwickelung oder Evolution in γ, δ, ε, ζ ... durch continuirliche Substitution, bis zur letzten vollständig reducirten, deutlich ausgeführt, so dafs diese beyden Schemata die vollständigsten Belege für eine solche Behandlung abgeben. So weitläuftig auch übrigens an sich diese Substitutionen wirklich sind, so sind sie es doch weniger, als die zugehörigen Differentiationen, und hinterher zu machende Austauschungen (II) an ihrer Stelle seyn würden.

59. Exempel zu (58)

Zu der ersten Evolution, in γ, der Gröfse

$$\frac{D^6 . \beta^4}{1.2..6} = D\beta^4 . \frac{D^5 . \gamma}{1.2..5} + \frac{D^2 \beta^4}{1.2} . \frac{D^4 . \gamma^2}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

wie solche die Reductionsformel (58, III) für $n = 6$ und $m = 4$ giebt, die zweyte Evolution, in δ zu finden.

Hier ist klar, daſs man nur $\frac{\mathrm{D}^5.\gamma}{1.2.3..5}$, $\frac{\mathrm{D}^4.\gamma^2}{1.2.3.4}$ etc. (die Ausdrücke mit einem Puncte nach D) weiter zu entwickeln braucht. Man setze also in (58, III)

1) $n = 5$, $m = 1$, statt β, γ aber γ, δ, so kommt

$$\frac{\mathrm{D}^5.\gamma}{1.2..5} = \mathrm{D}\gamma.\frac{\mathrm{D}^4.\delta}{1.2.3.4} = \frac{\mathrm{D}^4.\delta}{1.2.3.4} \quad (58, \mathrm{VII})$$

2) $n = 4$, $m = 2$, statt β, γ wieder γ, δ, so erhält man

$$\frac{\mathrm{D}^4.\gamma^2}{1.2.3.4} = \mathrm{D}\gamma^2.\frac{\mathrm{D}^3.\delta}{1.2.3} + \frac{\mathrm{D}^2.\gamma^2}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^2\,\delta^2}{1.2}$$

Die gefundenen Zerlegungen dieser beyden *Dérivées*, statt ihrer in die erste Evolution substituirt, giebt die zweyte, in δ

$$\mathrm{D}\beta^4.\frac{\mathrm{D}^4.\delta}{1.2.3.4} + \frac{\mathrm{D}^2.\beta^4}{1.2}\left\{\begin{array}{l}\mathrm{D}\gamma^2.\frac{\mathrm{D}^3.\delta}{1.2.3}\\ + \frac{\mathrm{D}^2\,\gamma^2}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^2.\gamma^2}{1.2}\end{array}\right. + \text{etc.}$$

Man sehe die angef. Taf. im zweyten Anhange, auch [no. 27. p. 20]

60. Diese sinnreiche Deduction von derivativen immer einfachern Zerlegungen für die Polynomialgröſsen aus einer einzigen Formel, ist gleichwohl nicht, wie es scheinen könnte, dem Derivations-Calcul ausschlieſslich eigen. Derselben Substitutionen in Substitutionen zu demselben Zwecke, um alles dadurch zuletzt ganz einfach und gut geordnet, ausgedrückt, darzustellen, hat sich bereits der Etatsrath TETENS, in seiner *Formula Polynomiorum* (Sml I. S 1. f.) bedienet. Mehrere Anwendungen dieses Verfahrens in verschiedenen Ex-

empeln, kommen (das. S. 15 — 21) vor; wobey noch zu bemerken, dafs TETENS durchgängig bey den beyden ersten Classen: $\mathfrak{a}^n A$, $\mathfrak{b}^n B$, als für sich klaren, oder leicht erklärlichen und ihrem Werthe nach angeblichen (das. S. 9. §. 5) stehen bleibt, ARBOGAST hingegen durchaus alle mit dem Zeichen D behaftete Gröfsen zerlegt, bis dieser derivative Charakter ganz verschwunden ist. Eine sorgfältige Analyse des Tetenschen Verfahrens, mit Vergleichung und Reduction seiner Zeichen auf die combinatorischen, habe ich in den Anmerkungen zu jener Abhandlung an mehreren Orten, und noch ausführlicher (Ebendas. S. 250 — 254) im Zusammenhange vorgetragen. Hoffentlich wird die dort (S. 252) vorgelegte anschauliche Darstellung in meinen Zeichen, und deren combinatorische Auflösung (S. 253) viel dazu beytragen: TETENS Substitutionsmethode, und dadurch auch die ARBOGASTISCHE, in der Kürze zu übersehen.

61. Eine, der derivativen Reductionsformel (58, II) vollkommen gleichgültige und identische, folglich auch mit dem Tetenschen und Arbogastischen Substitutionsverfahren (60) übereinstimmende, combinatorische Formel, habe ich bereits vorlängst (*Nov. Syst. Perm.* p. LV, 9) nachgewiesen. Man vergleiche Sml. I. S. 236; Arch. d. Math. H. II. S. 230, 231; oder hier (52, II, Anmerk. 4).

Es ist nämlich, für $\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.} = p$, der $(n+1)^{te}$ Coefficient der ganzen positiven Potenz m von p, d. i. $p^m \varkappa(n+1)$, oder die m^{te} Combinations-Classe M zur Summe $m+n$ mit den zugehörigen Polynomial-Coefficienten $\mathfrak{m}$ versehen, d. i.

$$\mathfrak{m}^{m+n}M = {}^m\mathfrak{A}\beta^{m-1}\mathfrak{a}^n A + {}^m\mathfrak{B}\beta^{m-2}\mathfrak{b}^n B + {}^m\mathfrak{C}\beta^{m-3}\mathfrak{c}^n C + \text{etc.}$$

$$\begin{pmatrix} \beta, \gamma, \delta\ \varepsilon \ldots \\ 1, 3, 3, 4 \ldots \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \eta \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \ldots \end{pmatrix}$$

Die Glieder rechter Hand brechen mit demjenigen ab, wo zuerst die Zahl des Binomial-Coefficienten so groſs wie m, oder die der Classe so groſs wie n ist. Auch erhellet, daſs diese Formel einzelne höhere Classen der Potenzen durch Summen von niedrigern Classen giebt, eben so, wie die Derivations-Formel (58, III) einzelne höhere Derivationen durch Summen von niedrigern ausdrückt.

62. Demnach ist (58, III)

$$\frac{D^n . \mathfrak{G}^m}{1 . 2 . . n} = \mathfrak{m}^{m+n} M$$

$$\left[\begin{array}{l} D . \mathfrak{G} = 1\,\gamma \\ D^2 . \mathfrak{G} = 1.2\,\delta \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}\right] \left(\begin{array}{l} \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots \\ 1, 2, 3, 4 \ldots \end{array}\right)$$

ingleichen

$$D\,\mathfrak{G}^m . \frac{D^{n-1} . \gamma}{1.2..n-1} + \frac{D^2 \mathfrak{G}^m}{1.2} . \frac{D^{n-2} . \gamma^2}{1.2..n-2} + \frac{D^3 \mathfrak{G}^m}{1.2.3} . \frac{D^{n-3} . \gamma^3}{1.2..n-3} + \text{etc.}$$

$$\left[\begin{array}{llll} \frac{D . \gamma}{1 . \delta} & \frac{D^2 . \gamma}{1.2.\varepsilon} & \frac{D^3 . \gamma}{1.2.3\zeta} & \frac{D^4 . \gamma \ldots}{1.2.3.4\eta \ldots} \end{array}\right]$$

$$= {}^m\mathfrak{A}\,\mathfrak{G}^{m-1}\,\mathfrak{a}^n A + {}^m\mathfrak{B}\,\mathfrak{G}^{m-2}\,\mathfrak{b}^n B + {}^m\mathfrak{C}\,\mathfrak{G}^{m-3}\,\mathfrak{c}^n C + \text{etc.}$$

$$\left(\begin{array}{llllll} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \ldots \end{array}\right)$$

und

$$D^1 \mathfrak{G}^m = {}^m\mathfrak{A}\,\mathfrak{G}^{m-1} \qquad \Big| \qquad \frac{D^{n-1} . \gamma}{1.2..n-1} = \mathfrak{a}^n A$$

$$\frac{D^2 \mathfrak{G}^m}{1.2} = {}^m\mathfrak{B}\,\mathfrak{G}^{m-2} \qquad \Big| \qquad \frac{D^{n-2} . \gamma^2}{1.2..n-2} = \mathfrak{b}^n B$$

$$\frac{D^3 \mathfrak{G}^m}{1.2..3} = {}^m\mathfrak{C}\,\mathfrak{G}^{m-3} \qquad \Big| \qquad \frac{D^{n-3} . \gamma^3}{1.2..n-3} = \mathfrak{c}^n C$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \Big| \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{D^n \mathfrak{G}^m}{1.2..n} = {}^m\mathfrak{N}\,\mathfrak{G}^{m-n} \qquad \Big| \qquad \frac{D^{n-n} . \gamma^n}{1.2..n-n} = \mathfrak{n}^n N$$

für denselben derivativen und combinatorischen Zeiger, wie gleich vorher.

Dies wäre also eine vollständige Vergleichung der derivativen und combinatorischen Reductionsformel (58, III und 61) und ihrer Elemente, nach welcher man eine sogleich in die andere umsetzen und verwandeln kann.

60. Es wird der Mühe werth seyn, auch eine vergleichende Darstellung der aus diesen Formeln fliefsenden Verfahren, von mir, von TETENS und von ARBOGAST vorzulegen. Ich will dazu den Arbogastischen Ausdruck $\frac{D^5 . \beta^4}{1 \cdot 2 \ldots 5}$ (62, für $n = 5$; $m = 4$) gebrauchen, der mit meinem $\mathfrak{d}\,{}^9D = \mathfrak{d}^4 + {}^5D$ gleichgeltend ist; der Zeiger sey wie am angef. O.

Auflösung von $\frac{D^5 . \beta^4}{1 \cdot 2 \ldots 5} = \mathfrak{d}^4 + {}^5D = \mathfrak{d}\,{}^9D$

I. Nach HINDENBURGS Verfahren hat man die Wahl, ob man 1) die Entwickelung nach $\left(\begin{matrix} \mathfrak{d}\,{}^9D \\ \beta, \gamma, \delta \ldots \\ 1, 2, 3, \ldots \end{matrix}\right)$ ohne alle weitere Zerlegung in niedrigere Classen sogleich vornehmen; oder 2) dafür die Reductions-Formel (61, 62)

$$\begin{matrix} \mathfrak{d}^4 + {}^5D \\ \left(\begin{matrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix}\right) \end{matrix}$$

$$=$$

$$\begin{matrix} {}^4\mathfrak{A}\,\beta^3\,\mathfrak{a}\,{}^5A + {}^4\mathfrak{B}\,\beta^2\,\mathfrak{b}\,{}^5B + {}^4\mathfrak{C}\,\beta^1\,\mathfrak{c}\,{}^5C + {}^4\mathfrak{D}\,\beta^0\,\mathfrak{d}\,{}^5D \\ \left(\begin{matrix} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}\right) \end{matrix}$$

gebrauchen; oder endlich 3) auch die Classen ${}^5A$, ${}^5B$, ${}^5C$, ${}^5D$, des letzten Ausdrucks noch weiter, mit gehöriger Abänderung des Zeigers, zerlegen will.

Im ersten Falle erhält man, wenn man die Complexionen von ${}^9D$, für den obigen Zeiger, eben so wie bey ${}^{10}D$ (Sml. I. S. 187, 188) für den dortigen ableitet:

$$\overset{\mathfrak{d}\,{}^9D}{\begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\delta \ldots \\ 1\;2\;3 \ldots \end{pmatrix}} = \left\{ \begin{array}{l} 4\beta^3\eta + 12\beta^2\gamma\zeta + 12\beta^2\delta\varepsilon \\ + 12\beta\gamma^2\varepsilon + 12\beta\gamma\delta^2 + 4\gamma^3\delta \end{array} \right\}$$

Im zweyten Falle, wo (nach obigem Zeiger) $\mathfrak{a}\,{}^5A = \eta$; $\mathfrak{b}\,{}^5B = 2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon$; $\mathfrak{c}\,{}^5C = 3\gamma^2\varepsilon + 3\gamma\delta^2$; $\mathfrak{d}\,{}^5D = 4\gamma^3\delta$; kommt

$$\overset{\mathfrak{d}\,{}^{4+5}D}{\begin{pmatrix} \beta\,\gamma\,\delta \ldots \\ 1\;2\;3 \ldots \end{pmatrix}}, = \left\{ \begin{array}{l} 4\beta^3.\eta + 6\beta^2[2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon] \\ + 4\beta^1[3\gamma^2\varepsilon + 3\gamma\delta^2] + 4\gamma^3\delta \end{array} \right\}$$

Im dritten Falle könnte man die weitere Zerlegung so weit verfolgen, bis man alles in ersten und zweyten Classen ausgedrückt hätte, wie Tetens; oder man könnte alles bis aufs letzte zerlegen, wie Arbogast. Davon in den beyden sogleich folgenden Numern (II, III).

II. Tetens Verfahren, in combinatorischen Zeichen ausgedrückt, würde für

$$\overset{\mathfrak{d}\,{}^{4+5}D}{\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \eta \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6 \end{pmatrix}}$$

folgendes geben:

$$\begin{array}{l} {}^4\mathfrak{A}\,\beta^3.\,\mathfrak{a}\,{}^5A \qquad = \\ + {}^4\mathfrak{B}\,\beta^2.\,\mathfrak{b}\,{}^5B \\ + {}^4\mathfrak{C}\,\beta^1.\,\mathfrak{c}\,{}^5C = {}^4\mathfrak{C}\,\beta^1. \left\{ \begin{array}{l} {}^3\mathfrak{A}\,\gamma^2.\,\mathfrak{a}\,{}^2A \\ {}^3\mathfrak{B}\,\gamma.\,\mathfrak{b}\,{}^2B \end{array} \right. \\ + {}^4\mathfrak{D}\,\beta^0.\,\mathfrak{d}\,{}^5D = {}^4\mathfrak{D}\,\beta^0.\ {}^4\mathfrak{A}\,\gamma^3.\,\mathfrak{a}\,{}^1A \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma, & \delta, & \varepsilon, & \zeta, & \eta \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \delta, & \varepsilon \\ 1, & 2 \end{pmatrix}$$

Setzt man nun statt der zwey letztern Ausdrücke linker Hand des Gleichheitszeichens, die gleichgültigen weitern Zerlegungen rechter Hand, so erhält man

$$\begin{array}{l|l} {}^{4}\mathfrak{A}\beta^{3}.\,\mathfrak{a}^{5}A & +\,{}^{4}\mathfrak{C}\beta^{1}.\left\{\begin{array}{l}{}^{3}\mathfrak{A}\gamma^{2}.\,\mathfrak{a}^{2}A\\ {}^{3}\mathfrak{B}\gamma.\,\mathfrak{b}^{2}B\end{array}\right\} \\ +\,{}^{4}\mathfrak{B}\beta^{2}.\,\mathfrak{b}^{5}B & +\,{}^{4}\mathfrak{D}\beta^{0}.\,{}^{4}\mathfrak{A}\gamma^{3}.\,\mathfrak{a}^{1}A \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{l}\gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta\\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{l}\delta,\ \varepsilon\\ 1,\ 2\end{array}\right)$$

alles in ersten und zweyten Classen: $\mathfrak{a}^{5}A$, $\mathfrak{b}^{5}B$; $\mathfrak{a}^{2}A$, $\mathfrak{b}^{2}B$; $\mathfrak{a}^{1}A$; (deren Werthe oder Complexionen man sogleich übersieht,) ausgedrückt; und so kommt;

$$\mathfrak{d}^{4+5}D \text{ (mit obigen Zeiger)} = \left\{\begin{array}{l} 4\beta^{3}.\,\eta + 5\beta^{2}.\,[2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon] \\ + 4\beta^{1}.\,[3\gamma^{2}.\,\varepsilon + 3\gamma.\,\delta^{2}] + \gamma^{3}\delta \end{array}\right\}$$

III. Arbogast's schon vorhin (58, III—VII; 59) erläutertes Verfahren, findet man namentlich für $\frac{D^{5}.\,\beta^{4}}{1.2..5} = \mathfrak{d}^{4+5}D = \mathfrak{d}^{9}D$ in einer besondern Tafel im zweyten Anhange umständlich in 5 Columnen ausgeführt, welchem die 6te und letzte (das *Développement réduit* enthaltend) beygefügt ist. Ich muſs auf diese Columnen hier verweisen. Die reducirten Glieder der letzten erscheinen genau in eben der Ordnung und Folge, wie bey mir und Tetens in (I, II). Ein anderes Beyspiel $\frac{D^{6}.\,\beta^{4}}{1.2..6} = \mathfrak{d}^{4+6}D = \mathfrak{d}^{10}D$ findet man in eben der Tafel von Arbogast ausgeführt. Für die combinatorische Entwickelung hätte man dafür wieder dieselbe dreyfache Wahl, wie in (I).

64. Die Tetensche Evolutionsformel (Sml. I, S. 13) für Potenzen, und die Arbogastische (53) überhaupt für Functionen der Reihen, setzen eine mehrmalige oft sehr vielfach wiederholte Zerlegung der Glieder oder

Coefficienten als Bedingung voraus (63, II). Bey der combinatorischen Evolutionsformel (39) hingegen ist es gleichgültig, ob man für die dortigen Polynomialgröfsen $\mathfrak{a}^n A$, $\mathfrak{b}^n B$, $\mathfrak{c}^n C$, ... die Reductions-Formel (61) überhaupt anwenden, nur einmal oder zu wiederholtenmalen anwenden, oder gar nicht gebrauchen will, weil die combinatorische unmittelbare Darstellung dieser Gröfsen, ohne alle vorgängige weitere Zerlegung, nicht die geringste Schwierigkeit hat.

65. Für Complexionen also gegebener Combinations-Classen mit ihren Zahlen-Coefficienten nach der Reihe (wie man sie gewöhnlich braucht) bedarf es für diese Classen gar keiner weitern Zerlegung. Eine solche aber kann zu Erfüllung anderer Bedingungen nützlich seyn; z. B. wenn man von

$$\mathfrak{e}^{15}E = \mathfrak{e}^{5+10}E$$

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \end{pmatrix}$$

1) nur diejenigen Complexionen, in welchen β^3 und β^2 vorkommt, oder 2) diejenigen wissen wollte, die gar kein β enthalten, so würde die Zerlegung (Sml. I. S. 237)

$${}^5\mathfrak{A}\beta^4\mathfrak{a}\,{}^{10}A + {}^5\mathfrak{B}\beta^3\mathfrak{b}\,{}^{10}B + {}^5\mathfrak{C}\beta^2\mathfrak{c}\,{}^{10}C + {}^5\mathfrak{D}\beta^1\mathfrak{d}\,{}^{10}D + {}^5\mathfrak{E}\beta^0\mathfrak{e}\,{}^{10}\mathfrak{E}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \vartheta & \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \end{pmatrix}$$

zeigen, dafs man für 1) nur ${}^5\mathfrak{B}\beta^3\mathfrak{b}\,{}^{10}B + {}^5\mathfrak{C}\beta^2\mathfrak{c}\,{}^{10}C$; für 2) blos ${}^5\mathfrak{E}\beta^0\mathfrak{e}\,{}^{10}\mathfrak{E}$, nach dem untergesetzten Zeiger, zu construiren hätte.

66. Die beyden Beyspiele (65, und 63, I) zeigen, dafs bey solchen Zerlegungen alles auf der gehörigen Zerfällung des Summenexponenten beruht. So wird für $\mathfrak{e}^{15}E$ der Summenexponent 15 in 5 + 10 zerfällt, wo der eine (hier erste) Theil immer der Zahl der gegebenen Classe (hier 5, wegen E), der andere der Ergänzung (10, zu 15) gleich ist. Wie die bey-

den Zahlen 5 und 10 die Potenz- und Summenexponenten von 𝔄, 𝔅, ℭ, ...; von ϐ; von 𝔞A, 𝔟B, 𝔠C, ... (in 65) weiter bestimmen, fällt deutlich in die Augen; der zugehörige Zeiger, der vorher von β anfieng, fängt nun von γ an. Mehrere ausführliche Exempel (Sml. I. S. 190, 191; 237; 255). Die allgemeine Zerlegung nach m und n (hier 62).

67. Drückt man durch fortgesetzte Zerlegungen und Substitutionen mit Tetens alles in erste und zweyte Classen aus (63, II) oder löſst man auch noch diese mit Arbogast auf (63, III), so ergeben sich auf diesem Wege die numerischen oder Polynomial-Coefficienten der Buchstabencomplexionen von selbst. Ich hingegen betrachte Litteralproducte und ihre Versezzungszahlen, jede für sich unabhängig von solchen Zerlegungen. Dadurch wird die Auffindung der erstern erleichtert, und die Beyfügung der letztern, nach bekannten Regeln, hat keine Schwierigkeit (Sml. I. S. 61-63, Not. i u. k). Als Beyspiel zur Vergleichung kann die derivaiive Entwickelung von $\frac{D^8.\varphi\alpha}{1.2..8} = \frac{D\varphi\alpha}{1}.\frac{D^7.\text{ϐ}}{1.2..7}$ $+ \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{D^6.\text{ϐ}^2}{1.2..6} +$ etc. [no. 47. p. 39, 40] und die gleichgültige combinatorische $\frac{D\varphi\alpha}{1}\,\mathfrak{a}^8A + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}\,\mathfrak{b}^8B$ $+$ etc. für den Zeiger $\left(\begin{matrix}\text{ϐ}, \gamma \ldots \iota \\ 1, 2 \ldots 8\end{matrix}\right)$ dienen. Die Polynomialgröſsen $\mathfrak{a}^8A$, $\mathfrak{b}^8B$, etc. stehen auch ausgeführt (*Infin. Dign. p.* 167. *Tab. V.*). Für die dortigen α, ϐ, γ.. wären hier ϐ, γ, $\delta \ldots \iota$ zu setzen.

68. Nach Tetens gelangt man zu der letzten reducirten Evolution wirklich etwas geschwinder als nach Arbogast. Indessen überholt der Letztere den Erstern auf einem andern Wege sehr weit. Tetens nehmlich begnügt sich bey diesen zerlegenden Substitutionen stehen zu bleiben, und führt jede Polynomialgröſse durch

sie hindurch; ARBOGAST hingegen, dem die groſse Weitläuftigkeit solcher derivirenden Zerlegungen, besonders für Glieder, die von dem ersten schon etwas entfernt sind, auffiel, hat sich ihrer blos als Mittel bedient, um kürzere und leichtere Regeln der Entwickelung daraus abzuleiten, und selbige nachher, statt jener weitläuftigern Derivationen, zu gebrauchen. Es ist wichtig, diese Regeln genauer zu kennen, und mit den combinatorisch-involutorischen zu vergleichen.

69. ARBOGAST hat die successiven Evolutionen in $\gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ von zwey auf einander folgenden *Dérivées* $\frac{D^5 . \mathfrak{G}^4}{1 . 2 \ldots 5}$ und $\frac{D^6 . \mathfrak{G}^4}{1 . 2 \ldots 6}$, einzeln, (jede besonders) nach der Formel (57. III) berechnet und in einer Tafel [no. 27. p. 20, 21; hier zw. Anh.] aufgestellt, in welcher die gleichnamigen Evolutionen in verticalen Columnen über einander geordnet sind, um solche desto bequemer mit einander vergleichen zu können und daraus die Regel herzuleiten, wie jede untere Colonne, vorzüglich aber die letzte reducirte, aus der unmittelbar darüber stehenden obern sich deriviren lasse. In der combinatorischen Sprache: „Wie aus den gegebe-
„nen Complexionen einer Classe zur Summe n, die
„Complexionen derselben Classe, aber zur nächst höhern
„Summe $n + 1$ (hier, aus den Complexionen von $\mathfrak{d}^9 D$
„die von $\mathfrak{d}^{10} D$) herzuleiten seyen."

70. Es ist wesentlich nothwendig, wie auch [no. 28] erinnert wird, sich vorzüglich bey den reducirten Evolutionen der beyden letzten Colonnen der Tafel, die das Zeichen D nicht weiter enthalten zu verweilen, und sie genau mit einander zu vergleichen. Aus solchen Vergleichungen nun der über einander stehenden Colonnen überhaupt, und der beyden letzten reducirten insbesondere [no. 27] und andern schon vorher gemachten Beobachtungen, wird der Schluſs [no. 28] gezogen:

„Um die letzte reducirte Evolution der *Dérivée* in „(II) abzuleiten, hat man keine andere Derivationen „zu machen, als von den letzten Buchstaben aller Glie- „der (der Complexionen) in (I) und von den vorletz- „ten Buchstaben einiger dieser Complexionen; alle übri- „gen Buchstaben aber unverändert zu lassen.“

„Complexionen der letzten Art sind alle diejeni- „gen, wo (wenn die Buchstaben nach ihrer Folge ge- „ordnet sind) der letzte Buchstabe der Complexion, oder eine Potenz desselben, den unmittelbar vorher- „gehenden Buchstaben des Alphabets, oder eine Potenz „oder Function dieses Buchstabens, zum Vorgänger „hat. w) Diese Complexionen sind die einzigen, wel- „che zwey Derivationen zulassen; auch macht man sie „gleich auf der Stelle hinter einander.“

Wie die letzten reducirten *Dérivées divisées* in den eben erwähnten Fällen zu nehmen seyen, wird [no. 28, 29] nachgewiesen und ausführlich gerechtfertiget. Hier kann nur die aus den sämtlichen Beobachtungen gezogene Vorschrift [die *Règle* no. 30] angegeben werden.

Um aus den, nach der Folge der Buchstaben (das heifst gut) geordneten Complexionen der Function $\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$, die gleichfalls gut geordneten Complexionen von $\frac{D^{n+1}.\varphi\alpha}{1.2..n+1}$ zu deriviren, verfährt man also:

w) In diesem Falle wären alle diejenigen Complexionen, wo in den beyden letzten Stellen zween nächst auf einander folgende Buchstaben, z. B. $\gamma\delta$, oder ihre Potenzen $\gamma^m\delta^n$ vorkämen; oder auch, wenn der vorlezte Buchstabe, wie bey den zur Form $\frac{D^m.\varphi\alpha}{1.2..m}.\beta^m$, gehörigen Gliedern, mit einem Functionalzeichen behaftet wäre.

1) „Man variirt in jeder Complexion der $\frac{\mathrm{D}^n.\varphi\alpha}{1.2..n}$ „den letzten Buchstaben oder seine Potenz, in„dem man (ihn oder sie) differentiirt, und schlecht„hin β statt $\mathrm{D}.\alpha$; γ statt $\mathrm{D}.\beta$: δ statt $\mathrm{D}.\gamma$; u. s f. ohne „weitere Coefficienten, als die Einheit, setzt.“

2) „Überdies variirt man auch noch den vorletz„ten Buchstaben, seine Potenz, oder seine Function, „aber nur in denjenigen gut geordneten Complexionen, „in welchen sein alphabetischer Nachfolger „die nächste (also letzte) Stelle nach ihm einnimmt. „Weil dadurch der Exponent der Potenz des letzten „Buchstabens um eine Einheit vermehrt wird, so divi„dirt man durch den so vermehrten Exponenten.“

3) Giebt eine Complexion zwey Derivationen (2) so wird nach der aus (1) sogleich die aus (2) gesetzt.

Exempel zur Erläuterung der Regel, in Beziehung auf die beyden letzten Colonnen der Tafel [p. 20, 21].

71. Um aus den gut geordneten Gliedern oder Complexionen (63):

$$4\mathfrak{b}^3.\eta+6\mathfrak{b}^2(2\gamma.\zeta+2\delta.\varepsilon)$$
$$+4\mathfrak{b}(3\gamma^2.\varepsilon+3\gamma.\delta^2)+4\gamma^3.\delta$$

d. i. aus dem reducirten Werthe von $\frac{\mathrm{D}^5.\mathfrak{b}^4}{1.2..5}$, den nächstfolgenden von $\frac{\mathrm{D}^6.\mathfrak{b}^4}{1.2..6}$ zu deriviren.

1) variire man die letzten Buchstaben dieser Glieder, indem man statt ihrer die nächstfolgenden setzt, und beobachte gehörig die Potenzen. Das giebt:

$$4\mathfrak{b}^3.\theta+6\mathfrak{b}^2(2\gamma.\eta+2\delta.\zeta)$$
$$+4\mathfrak{b}(3\gamma^2.\zeta+3\gamma.2\delta\varepsilon)+4\gamma^3.\varepsilon$$

2) Diejenigen Complexionen des obigen Ausdrucks, wo man noch überdieſs die vorletzten Buchstaben variiren muſs, (70, 2) sind:

$$6\beta^2 . 2\delta . \varepsilon + 4\beta . 3\gamma . \delta^2 + 4\gamma^3\delta$$

und diese geben, durch eine zweyte Derivation, die Complexionen:

$$6\beta^2 . \frac{2\varepsilon\varepsilon}{2} + 4\beta . \frac{3\delta\delta^2}{3} + \frac{4 . 3\gamma^2\delta\delta}{2}$$

welche, den übrigen vorher (in 1) gefundenen, in ihrer Ordnung beygefügt, den reducirten Werth von $\frac{D^6 . \beta^4}{1 . 2 . . 6}$, d. i.

$$4\beta^3 . \theta + 6\beta^2 (2\gamma . \eta + 2\delta . \zeta + \varepsilon^2)$$
$$+ 4\beta (3\gamma^2 . \zeta + 3\gamma . 2\delta\varepsilon + \delta^3) + 4\gamma^3 . \varepsilon + 6\gamma^2 . \delta^2$$

darstellen. [no. 28].

Ein Paar andere Beyspiele, die reducirten Werthe von $\frac{D^7 . \beta^4}{1 . 2 . . 7}$, $\frac{D^8 . \beta^4}{1 . 2 . . 8}$, jeden aus dem unmittelbar vorhergehenden, abzuleiten [no. 29. p. 25]. Einige noch ausführlichere Anwendungen [no. 31 — 33].

72. Hier (70, 71) wird, wie bey combinatorischen Anordnungen, die alphabetische Ordnung der Buchstaben festgesetzt (vergleiche Note °); die Buchstaben der einzelnen Glieder nach ihrer Folge zu schreiben (was ich gut geordnet nenne) anbefohlen; auch auf Buchstaben aufmerksam gemacht, die, wie zwey nächste im Alphabet, unmittelbar auf einander folgen. Die letzten oder vorletzten Buchstaben der Complexionen variiren, heifst nichts anders, als sie gegen die nächstfolgenden des Alphabets oder Zeigers austauschen; und so ist die Vorschrift (71) aus den reducirten Gliedern oder Complexionen von $\frac{D^5 . \beta^4}{1 . 2 . . 5}$ die von $\frac{D^6 . \beta^4}{1 . 2 . . 6}$ zu deriviren, combinatorisch, und mit dem Verfahren im ersten Anhange (3, I) „aus den Complexionen für ${}^9D$ die für ${}^{10}D$ herzuleiten" selbst bis

auf die Ordnung, in welcher die Complexionen auf einander folgen, im Wesentlichen übereinstimmend. Nur der Umstand, daſs Arbogast mit den Litteralproducten zugleich ihre numerischen Coefficienten bestimmt (67) macht einige darauf sich beziehende Zusätze der Regel nöthig, deren die einfachere combinatorische Deduction nicht bedarf; wo diese Zahlen den Buchstaben-Complexionen hinterher, nach einer leichten Regel, beygefügt werden (67).

73. Umgekehrt, aus den reducirten, gut geordneten Gliedern von $\frac{D^n . \varphi x}{1.2..n}$, die, von dem zunächst vorhergehenden $\frac{D^{n-1} . \varphi \alpha}{1.2..n-1}$ zu deriviren.

Dafür wird [no, 36, p. 31] folgende Regel gegeben:

I. „Man werfe alle Complexionen weg, (man „übergehe sie) deren lezte Buchstaben auf eine höhere „Potenz, als die erste, erhoben sind.“

II. „In jeder Complexion, die auf einen einfachen „Buchstaben sich endigt, vertausche man diesen letzten „Buchstaben mit dem vorhergehenden im Alphabete.“

III. „Wo sich (aus II) eine neue Potenz bildet, „dividire man das Glied durch den Exponenten dieser „Potenz.“

Anm. Der dritte Theil der Regel geht blos auf die numerischen Coefficienten, die ich von den Litteralproducten abgesondert betrachte. Die übrigen beyden Theile stimmen genau mit meiner combinatorischen Regel (${}^nD$ aus ${}^{n+1}D$ z.B. ${}^9D$ aus ${}^{10}D$ abzuleiten, Erster Anh. 3, III. überein). Andere Worte; eine andere Ordnung der Sätze: der Inhalt aber der Regel, im strengsten Sinne des Worts, derselbe.

ARBOGAST nennt ein solches Verfahren *Dérivation inverse*, im Gegensatze mit jenem andern, *Dérivation directe* (71); daher auch seine *Dérivées directes et inverses.*

(B) *Derivative Darstellung jedes verlangten Gliedes, ausser der Ordnung, von allen andern (vorhergehenden und folgenden) unabhängig.*

74. Bisher (58—73) ist gezeigt worden, wie die Polynomialgröfsen $\frac{D^{n-1}.\mathfrak{g}^m}{1.2..n-1}$, $\frac{D^n.\mathfrak{g}^m}{1\;2..n}$ (die Combinationsclassen $\mathfrak{m}^{m+n-1}M$, $\mathfrak{m}^{m+n}M$) einander so bestimmen, dafs, wenn der reducirte gut geordnete Werth der einen gegeben ist, der der andern sich daraus derivireu lasse; oder, in bestimmten Classen, wie

aus $\mathfrak{a}^n A$, $\mathfrak{b}^n B$, $\mathfrak{c}^n C$, $\mathfrak{d}^n D$, $\mathfrak{e}^n E$, ...
die $\mathfrak{a}^{n+1}A$, $\mathfrak{b}^{n+1}B$, $\mathfrak{c}^{n+1}C$, $\mathfrak{d}^{n+1}D$ $\mathfrak{e}^{n+1}E$, ...

und umgekehrt; überhaupt aus jeder gegebenen Classe zu einer bestimmten Summe, sich die gleichnamige Classe zu der um 1 verschiedenen Summe ableiten lasse.

Sucht man die Evolution der Glieder oder Coefficienten der gegebenen Function hinter einander, oder will man aus einem gegebenen Coefficienten der Reihe den unmittelbar vorhergehenden oder folgenden bestimmen, so sind die Regeln dafür (71, 73) in der Anwendung [no 31—33] ganz bequem. Dennoch ist eine, von allen vorhergehenden und folgenden Coefficienten ganz unabhängige, Darstellung eines verlangten Coefficienten immer vorzüglicher, und gleichsam der letzte und höchste Zweck, worauf die combinatorische (und so auch die derivative) Analysis für diesen und ähnliche Fälle hinarbeitet.

75. In dem $(n+1)^{ten}$ Coefficienten [no. 22]

$$\frac{D^n.\varphi\alpha}{1.2..n} = \frac{D^n\varphi\alpha}{1.2..n}.\mathfrak{b}^n + \frac{D^{n-1}\varphi\alpha}{1.2..n-1}.D.\mathfrak{b}^{n-1}$$

$$+\frac{D^{n-2}\varphi\alpha}{1.2..n-2}.\frac{D^2.\mathfrak{b}^{n-2}}{1.2} + \text{etc.} + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{D^{n-2}.\mathfrak{b}^2}{1.2..n-2}$$

$$+ D\varphi\alpha\frac{D^{n-1}.\mathfrak{b}}{1.2..n-1}$$

der derivativen Evolutionsformel (53) ist die Folge der Polynomialgrößen,

vorwärts gelesen,

$$\mathfrak{b}^n;\ D.\mathfrak{b}^{n-1};\ \frac{D^2.\mathfrak{b}^{n-2}}{1.2};\ \frac{D^3.\mathfrak{b}^{n-3}}{1.2.3};\ \ldots\ \frac{D^{n-1}.\mathfrak{b}}{1.2..n-1}$$

rückwärts gelesen,

$$\frac{D^{n-1}.\mathfrak{b}}{1.2..n-1};\ \frac{D^{n-2}.\mathfrak{b}^2}{1.2..n-2};\ \frac{D^{n-3}.\mathfrak{b}^3}{1.2..n-3};\ldots D.\mathfrak{b}^{n-1};\mathfrak{b}^n$$

Die damit verbundenen, mit dem Functionalzeichen behafteten Größen, $D\varphi\alpha$, $\frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}$, $\frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}$, ... hängen von successiven ganz einfachen Differentiationen ab. Ließen sich nun die obigen Polynomialgrößen, oder die combinatorischen

$$\mathfrak{a}^n A,\ \mathfrak{b}^n B,\ \mathfrak{c}^n C,\ \mathfrak{d}^n D,\ \ldots\ \mathfrak{n}^n N$$

vorwärts und rückwärts eben so leicht successive von einander deriviren, so könnte man, auf einem doppelten Wege, zu jedem verlangten Coefficienten, ausser der Ordnung, von vorhergehenden oder folgenden Coefficienten unabhängig, gelangen, Dies führt auf folgende beyde Aufgaben:

76. Aus den reducirten gut geordneten Gliedern von $\frac{D^n.\mathfrak{b}^m}{1.2..n}$, die, für $\frac{D^{n+1}\mathfrak{b}^{m-1}}{1.2..n+1}$ zu deriviren; oder, in combinatorischen Ausdrücken: Aus den Complexionen von $\mathfrak{m}^{m+n}M$ (der m^{ten} Combinationsclasse

zur Summe $m+n$) die Complexionen von $\overset{-1}{\mathfrak{m}}{}^{m+n}\overset{-1}{M}$ (der nächst vorhergehenden $(m-1)^{ten}$ Classe zu derselben Summe) beyde für den Zeiger $\begin{pmatrix} \beta, \gamma, \delta, \ldots \\ 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$ abzuleiten.

Dafür giebt Arbogast [no. 43] folgende Auflösung (*Règle*):

I. „Man dividire den ganzen Ausdruck durch m, „multiplicire jede Potenz von β durch ihren Exponen„ten und vermindere diesen Exponenten um 1; nicht „zu vergessen, daſs in den Gliedern, die kein β enthal„ten, dieser Exponent 0 ist."

II. „Nach dieser Vorbereitung mache man die „Derivationen nach der Regel [no. 30] oder hier (71).

„Einige Beispiele dazu [no. 44]

77. Die Vorbereitung in (76, I) geht ganz die numerischen Coefficienten der Litteralproducte oder Buchstabencomplexionen an, bis auf die Verordnung den Exponenten von β um 1 zu vermindern, welches meiner Wegnahme eines β, oder dessen Absonderung durch einen verticalen Strich, entspricht. Nach dieser Vorbereitung, welcher meine Darstellung nicht bedarf, wird sogleich die combinatorische Regel [no. 30] oder hier (71) in Ausübung gebracht; wodurch das ganze Verfahren recht eigentlich combinatorisch wird. (Erster Anhang 5, IV). Das wird noch deutlicher aus der Arbogastischen Auflösung der folgenden Aufgabe, der umgekehrten von dieser, erhellen.

78. Aus den reducirten gut geordneten Gliedern von $\frac{D^n . \beta^m}{1.2..n}$, die für $\frac{D^{n-1} . \beta^{m+1}}{1.2..n-1}$ zu deriviren; oder, in combinatorischen Ausdrücken: Aus den Complexionen von $\mathfrak{m}^{m+n}M$ (der m^{ten} Combinationsclasse zur Summe $m+n$) die Complexionen von $\overset{+1}{\mathfrak{m}}{}^{m+n}\overset{+1}{M}$ (der nächst folgenden $(m+1)^{ten}$ Classe

zu derselben Summe) beyde für den Zeiger $\binom{\beta, \gamma, \delta, \ldots}{1, 2, 3, \ldots}$ abzuleiten.

Arbogast giebt davon [no. 47] folgende Auflösung (*Règle*).

I. „Man mache zuförderst folgende Vorbereitung: Man erhöhe den Exponenten jeder Potenz „von β um 1, daher man die Glieder, die kein β enthalten mit β multipliciren muſs; und mache die wegen dieser Erhöhung nöthige Veränderung der von den „Potenzen von β herrührenden numerischen Coefficienten, indem man durch jeden so um 1 vermehrten „Exponenten dividirt, und alle Glieder mit $m + 1$ multiplicirt."

II. „Auf die so vorbereiteten Glieder wende man „die Regel [no. 36] hier (73) an, so erhält man alle „Glieder von $\frac{p^{n-1} \cdot \beta^{m+1}}{1 \cdot 2 \ldots n-1}$, die β enthalten."

III. „Um die Glieder zu haben, in denen β nicht „vorkommt, vertausche man, in denjenigen der eben „erhaltenen Glieder, wo nur die erste Potenz von β „vorkommt, β mit γ, und dividire durch die Exponenten der neuen Potenzen die sich bilden; darauf wende „man wieder die Regel [no. 36] an, so erhält man alle „Glieder, worinn γ, aber kein β, vorkommt.

IV. „In denjenigen der eben (nach III) erhaltenen Glieder, worinn nur die erste Potenz von γ vorkommt, vertausche man γ mit δ, und wende von neuem die Regel [no. 36] an."

V. „So fährt man fort, bis man Glieder erhalten „würde, worinn der letzte Buchstabe ein früherer in der „alphabetischen Ordnung seyn würde, als die vorhergehenden des Gliedes.

Exempel dazu [no. 47 und 49].

79. Hier einige diese Regel betreffende Bemerkungen:

Der Vortrag derselben sowohl, als die daraus folgende Entwickelung der Glieder, zeigen, mit Ausnahme dessen, was sich blos auf die Arbogastische Miterhaltung der numerischen Coefficienten bezieht, (die ich den Complexionen erst hinterher beyfüge) eine rein-combinatorische Anordnung in aller Form.

Die alphabetische Ordnung der Buchstaben von β an, in Beziehung auf ihre respectiven Zahlenwerthe von 1 an x), dient dabey als Grundlage für die daraus zusammenzusetzenden Glieder. Zuerst werden die mit β anfangenden (zur Ordnung β gehörigen) Complexionen, durch Erhöhung des Exponenten von β um 1, (durch Vorschreibung eines β vor die gegebenen Complexionen) und Anwendung der Regel (73) aufgeführt (78, I, II); daraus werden durch Umtauschung von β mit γ, und weitere Anwendung jener Regel, die mit γ anfangenden (die Ordnung γ ausmachenden) Complexionen gefolgert (78, III); und daraus weiter, durch Umtauschung von γ mit δ, und erneuerte Anwendung jener Regel, die mit δ anfangenden (zur Ordnung δ gehörigen) Complexionen (78, IV); u. s. w. die folgenden Ordnungen ε, ζ, η.. so lange das Umtauschen der Anfangsbuchstaben und die Anwendung jener Regel für die Endbuchstaben, statt findet; so lange nämlich durch Anwendung beyder Verfahren gut geordnete Complexionen (72) daraus folgen.

x) *Il est nécessaire, de faire observer aux coefficiens* ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$...) *des puissances* x^0, x^1, x^2, x^3... *un certain ordre, par exemple, l'ordre alphabétique, ou de les marquer par des indices; il est avantageux, que le nombre qui exprime l'indice soit le même que l'exposant de la puissance de x à la quelle le coefficient appartient;* also 0 fur α, und 1, 2, 3, 4... für β, γ, δ, ε, ... *respective* [no. 9. p. 6, 7]. Man vergleiche die Note v.

Jedes einzelne Glied, dessen Anfangsbuchstabe durch Vertauschung gegen den nächstfolgenden des Alphabets in seinem Zahlenwerthe um 1 erhöhet wird, wird in seinem Endbuchstaben, durch Anwendung der Regel (73), nach welcher man den nächst vorher gehenden dafür setzt, um eben so viel erniedrigt. Dadurch wird also den Complexionen immer dieselbe Summe erhalten; und da die Erhöhung durch Tausch nur die Anfangsbuchstaben betrift, die keine höhere als die erste Potenz haben, (78, III, IV) und mit Veränderung der Endbuchstaben (73) nur so lange fortgefahren wird, als noch gleiche oder spätere Buchstaben auf frühere folgen: so kann auch keine Complexion entstehen, die nicht gut geordnet wäre (78, V). Und so werden denn durch die Auflösung (78) lauter gut geordnete Complexionen und Classen gefolgert, deren Glieder sämtlich zu derselben Summe gehören, und wie wachsende Zahlen (arithmographisch) fortgehen.

Hier ist also wieder die derivative Auflösung (78) mit der combinatorischen (Erster Anhang 5, III) vollkommen übereinstimmend und identisch. Man vergleiche die Anmerkung a. a O. des Anhangs.

80. Diesem widerspricht nicht, was Arbogast (*Préf. p.* V) sagt: „*Je n'ai fait aucun usage des Combinaisons.*" Er hat nämlich bey seinen Untersuchungen keine Combinationen zum Grunde gelegt; ist nicht von Combinationen ausgegangen; hat nichts von der dafür eingeführten Sprache gebraucht; seine successiven Derivationen haben ihn auf die ganz einfachen Regeln für die endlichen *Développemens réduits* geleitet —. Daſs aber gleichwohl eben diese Regeln, welche die Complexionen sogleich vollkommen reducirt, in der simpelsten Gestalt, und gut geordnet, darstellen; daſs diese so unentbehrlichen Regeln, die sich nicht weiter abkürzen lassen, sowohl dem Inhalte als der Ausführung nach, ganz combinatorisch und mit dem vor-

längst bekannten genau übereinstimmend sind, ist eben so gewifs; und so erhellet, dafs die anfänglichen Schwierigkeiten des derivativen Verfahrens sich endlich in combinatorische Regeln auflösen, und dadurch sich gründlich heben und in der Kürze abthun lassen. Man kann diese Regeln nicht etwa zu den Berührungspuncten rechnen, von denen in der Vorrede [p. V.] erwähnt wird, dafs die Derivationsmethode mit der combinatorischen einige solche Puncte gemein habe; denn sie betreffen gerade zu die Hauptsache, von der hier die Rede ist: „die prompte ganz einfache Entwickelung und Darstellung der Coefficienten der derivativen Evolutionsformel.“

81. Es giebt allerdings einige gemeinschaftliche Berührungspuncte beyder Methoden: die festgesetzte alphabetische oder numerische Anordnung der Buchstaben und Zahlen; die Beziehung der Exponenten der variabeln Gröfsen auf die Coefficienten der Glieder, in denen sie vorkommen (22 und die dortige Note); das Aufmerken auf Buchstaben in den Complexionen, die wie zwey nächste im Alphabet, unmittelbar auf einander folgen; das Austauschen der Anfangs- oder Endbuchstaben, zuweilen auch der vorletzten, gegen die zunächst folgenden oder vorhergehenden im Alphabete (72, 79). Da aber aus dieser gemeinschaftlichen Voraussetzung, durch das fortgesetzte derivative Verfahren am Ende keine andern als die obigen schon vorher bekannten combinatorischen Regeln abgeleitet werden: so erhellet daraus der wichtige Einflufs der Combinationen auf die Analysis überhaupt, und insbesondere der Vorzug der combinatorischen Evolutionsformel (39), welche die gesuchten Glieder *directe* und mit absoluter Leichtigkeit finden lehrt; da hingegen die derivative Formel (53) erst durch Umwege dahin gelangt. Das wird zugleich die Darstellung combinatorischer Anordnungen und Derivationen im ersten

Anhange rechtfertigen. Ihre Unentbehrlichkeit bey dem Gebrauche der Evolutionsformeln, macht eine nähere Bekanntschaft mit derselben, in ihrer ursprünglichen ganz einfachen Gestalt, nothwendig und für mehrere Leser wünschenswerth, denen es angenehm seyn wird, das Wenige, was hier zur Vergleichung nöthig ist, (die arithmographische Form derselben) im Buche selbst zu finden. Auswärtige der deutschen Sprache unkundige Liebhaber werden über diese und andere combinatorische Regeln und Formeln, mit deren ganz kurzen Beweisen, in PFAFF's *Disquisitionibus analyticis* (*Tract. III. p.* 260 — 333) ausführliche Belehrung finden.

82. Noch einen bedeutenden Vorzug behaupten diese Regeln in ihrem combinatorisch-involutorischen Gewande, daſs sie, so wie die Einsicht in ihre Gründe, so leicht sind, daſs einmal ein verdienter Analyst sogar behauptete, man könne sie, ohne alle Anweisung, getrost dem gesunden Menschenverstande überlassen; jeder, der ihrer nöthig hätte, werde sie leicht finden und gebrauchen. In der That ist auch die (besonders rein-) combinatorische Form diejenige, die in Absicht auf Zusammensetzung und Entwickelung der Elemente, allen andern an Simplicität weit vorgeht; welches vornehmlich, oder vielmehr ganz allein, auf dem Umstande beruht, daſs in der Combinationslehre gleich zu Anfange, ausser jenen Berührungspuncten (81), die Begriffe von „— Complexionen zu bestimmten Sum„men; von gut geordneten Complexionen, Ordnungen „und Classen, wo die Glieder arithmographisch oder „lexikographisch fortgehen, und was das für einen Ein„fluſs auf die Veränderung der Buchstaben in den ein„zelnen Stellen habe; von combinatorischen Dependen„zen und den daher rührenden Involutionen und Evo„lutionen‘ — aufgeführt und festgesetzt werden. Ganz anders verhält es sich mit der derivativen Ableitung

der so eben vorgetragenen Regeln für die sowohl abhängige als unabhängige Evolution der Polynomialgrössen, die, weil sie im Grunde combinatorischer Art sind, ohne combinatorische Begriffe dabey anzubringen, auch nicht in der Kürze sich abthun und rechtfertigen lassen. y)

SECHSTER ABSCHNITT.

Die combinatorische Evolution der Polynomialgröſsen, auf dem directen Wege ist leichter, als die derivative Deduction derselben durch Substitutionen. Was ARBOGAST'N *veranlaſset haben könne, das Gegentheil zu behaupten. Zwiefache combinatorische Ansicht der derivativen Function* $\frac{D^n . \mathfrak{G}^m}{1.2..n}$. KRAMP'S *combinatorische Integrale oder Aggregate.* ROTHEN'S *Versuch einer Theorie solcher Integrale.*

83. Nach dem so eben Beygebrachten muſs es nothwendig befremden, wenn in [no. 52] behauptet wird: die Polynomialgröſsen β^n; $D.\mathfrak{G}^{n-1}$; $\frac{D^2.\mathfrak{G}^{n-2}}{1.2}$; etc. (meine a^nA, b^nB, ^nC, etc. n^nN) lieſsen sich auch combinatorisch ausführen, „*quoique d'une façon moins facile et moins analytique.* Über das

y) *Quoique les règles de la méthode simplifiée soient très faciles, l'analyse qui y mène peut paroître un peu longue. Outre que j'ai donné le moyen d'abréger cette analyse, j'observerai que l'apparence de longueur en doit être imputée en grande partie au soin que j'ai pris de tout démontrer et de ne rien passer de ce qui m'a paru propre à répandre quelque lumiere. Calc. des Deriv. Préf. p. IV.* Als Beyspiele will ich hier blos anführen, was über die *Développemens successives* und ihre Rechtfertigung [p. 18 — 25]; ingleichen [p. 39 — 41] über die Regel [no. 47] beygebracht worden.

moins analytique in der Folge; zuförderst noch etwas die Beschuldigung des *moins facile* betreffend.

84. Wer noch zweifeln könnte, daſs die Polynomialgröſsen mit unübertreflicher Leichtigkeit combinatorisch sich construiren und ausführen lassen, und daſs die derivativen endlichen Darstellungen derselben (die *Développemens réduits*) keine andern, als combinatorische, sind: der dürfte nur den ersten Anhang zu dieser Abhandlung mit Aufmerksamkeit im Zusammenhange lesen, um sich vollkommen davon zu überzeugen. Auch ist wohl voritzt die groſse Simplicität der combinatorischen Operationen allgemein anerkannt, und man giebt ohne Schwierigkeit zu, daſs sie leichter sind, als die arithmetischen; daſs Buchstaben sich leichter permutiren, combiniren, variiren, als Zahlen sich addiren, subtrahiren, multipliciren oder dividiren lassen.

85. Wenn gleichwohl am a. O. [no. 52] behauptet wird, die combinatorische Anordnung und Darstellung der Polynomialgröſsen sey weniger leicht, als die derivative, so läſst sich die Veranlassung zu einem solchen Ausspruche aus Folgendem begreiflich machen. Arbogast sagt (*Préf. p. v*), um die Zeit, da er seine Untersuchungen angefangen habe, wären ihm meine Bezeichnungen und Verfahren wenig oder gar nicht bekannt oder geläufig (*familières*) gewesen; meine Schriften habe er blos dem Titel nach gekannt; er habe seine eigenen Ideen verfolgt: und so ist es wohl möglich, daſs ihm nur meine ersten frühern Verfahren nicht aber die spätern weit vollkommnern und mannichfaltigern, rein-combinatorischen Darstellungen, bekannt geworden sind. Ein Beleg zu dieser Conjectur scheint zu seyn, daſs in dem ausführlichen Arbogastischen Werke, nur meiner ersten, vor mehr als zwanzig Jahren (1779) heraus gegebenen, noch sehr unvoll-

kommenen combinatorischen Schrift [z]) Erwähnung geschieht; die spätern aber, und in Absicht auf die verbesserte Methode und ihre weitere Anwendung, viel vorzüglichern α), ganz mit Stillschweigen übergangen werden.

86. Eine Bestätigung jenes Arbogastischen Ausspruchs (83) scheint selbst in der von ihm [no. 52, 53] aufgeführten Beschreibung des combinatorischen doppelten Ausdrucks für die Polynomialgröfse $\frac{D^n . \mathfrak{G}^m}{1 . 2 .. n}$ enthalten zu seyn. Ich will die ganze Stelle wörtlich hier anführen:

I. Der Ausdruck $\frac{D^n . \mathfrak{G}^m}{1 . 2 .. n}$ bedeutet den Coefficien-
„des $(n+1)$ten Gliedes der zu entwickelnden Potenz m
„des Polynoms $\mathfrak{G} + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 +$ etc.

„Wenn m eine ganze positive Zahl, so ist durch „die Theorie der Combinationen erweislich:

1) dafs dieser nämliche Coefficient aus der Summe „aller Producte besteht, die durch

$$\mathfrak{G}^p . \ \gamma^q . \ \delta^r . \ \varepsilon^s . \ . \ . \ .$$

„sich können darstellen lassen, wo $p, q, r, s \ldots$ ganze „positive Zahlen oder Null, und so beschaffen sind, dafs

$$p + q + r + s \text{ etc.} = m,$$
$$q + 2r + 3s + \text{ etc.} = n;$$

2) „dafs jedes dieser Producte zum numerischen Coefficienten hat,

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot m}{1 . 2 .. p \times 1 . 2 .. q \times 1 . 2 .. r \times 1 . 2 .. s \times \ldots}$$

z) *Infinitinomii Dignitatum — historia, leges ac formulae*; auf welche bald darauf (1781) die *primae lineae novi systematis Perm. Comb. et Variat.* folgten.

α) Namentlich die von mir heraus gegebenen **Hefte des mathematischen Archivs**, und die beyden **Sammlungen combinatorisch-analytischer Abhandlungen.**

„oder, welches auf eins hinaus läuft,

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(p+1)}{1.2..q \times 1.2..r \times 1.2..s \times \ldots}$$

„Nimmt man nun, (wie Euler mehrmals gethan „hat) $\int$ als Zeichen der Vereinigung mehrerer Glieder „oder Producte mit einander, so kann man den Coeffi-„cienten von x^n in der m^{ten} Potenz des obigen Poly-„noms, durch

$$\int \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(p+1)}{1.2..q \times 1.2..r \times 1.2..s \times \ldots} . \beta^p . \gamma^q . \delta^r . \varepsilon^s \ldots$$

„ausdrücken; und so ist denn

$$\frac{D^n . \beta^m}{1.2..n}$$

$$=$$

$$\int \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(p+1)}{1.2..q \times 1.2..r \times 1.2..s \times \ldots} . \beta^p . \gamma^q . \delta^r . \varepsilon^s \ldots,$$

für $p + q + r + s +$ etc. $= m$,
und $q + 2r + 3s +$ etc. $= n$;

„das ist die Relation, die wir hier nachweisen wollten.

II. „Eine andere Art, jene derivative Polynomial-„gröſse combinatorisch darzustellen, ist folgende:

„Nimmt man für die Buchstaben $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ „die respectiven Zeiger-Zahlen 1, 2, 3, 4 ... oder, „drückt man jene Buchstaben durch $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots$ aus: so deutet $\frac{D^n . \beta^m}{1.2..n}$ die Summe aller Producte an, „jedes zu m Buchstaben (wobey auch Wiederholungen „derselben Buchstaben verstattet sind), die sich ver-„schiedentlich dergestalt zusammen setzen lassen, daſs „in jedem Producte die Summe der Zeigerzahlen von „allen Buchstaben, gleich $m + n$; wo noch jedem sol-„chen Producte der numerische Coefficient, oder die „Zahl beyzufügen ist, welche die Menge der Versez-

„zungen ausdrückt, deren die Buchstaben des Products „(mit Rücksicht auf ihre Wiederholungen, wo derglei- „chen vorkommen) fähig sind.

„Durch Beyhülfe dieser Zeigerzahlen läfst sich das „Auffinden solcher Producte auf folgende, die Partition „der Zahlen betreffende, Frage zurück führen; Es ist „die ganze Zahl $m+n$ gegeben, man soll alle verschie- „dene Arten nachweisen, wie sich diese Zahl durch „Addition von m kleinern ganzen Zahlen, mit Wieder- „holungen, zusammen setzen lasse.

III. „Weil $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(p+1)}{1.2..q \times 1.2..r \times 1.2..s \times ..}$ für „das Product $\beta^p.\ \gamma^q.\ \delta^r.\ \varepsilon^s.\ \ldots$ die Menge der „Buchstabenversetzungen angiebt: so kann man da- „durch die numerischen Coefficienten oder Versetzungs- „zahlen für jedes Glied der Polynomialgröfsen $\frac{D.\ \beta^{m-1}}{1}$; „$\frac{D^2.\ \beta^{m-2}}{1.2}$; $\frac{D^3.\ \beta^{m-3}}{1.2.3}$; etc. verificiren. So z. B. wä- „re, für $\beta^3\ \gamma^2\ \delta^1$ die Summe der Exponenten „$3+2+1=6=m$, folglich $\frac{6.5.4}{1.2\times 1}=60$, die zu- „gehörige Versetzungszahl." So weit die Arbogasti- sche hierher gehörige Stelle.

87. Die doppelte combinatorische Ansicht für $\frac{D^n.\ \beta^m}{1.2..n}$ ist hier (86, I, II) sehr wahr und bündig dar- gestellt; aber eben diese Darstellung scheint auch jenen Ausspruch; „*moins facile*" für Leser wenigstens, die mit der Combinationslehre nicht bekannt genug sind, zu bestätigen — wenn nicht zugleich die Anwendung combinatorischer Formeln und Verfahren (auf I und II) nachgewiesen, vornehmlich aber nicht deutlich gezeigt wird, wie die Bedingungsgleichungen für

m und n (in I) combinatorisch sich behandeln lassen, und wie leicht ihre combinatorische Auflösung sey; denn das Verfahren dafür auf dem gewöhnlichen Wege führt allerdings zu verdrüſslichen Weitläuftigkeiten. (Sml. I. S. 119, 120).

88. Am leichtesten läſst sich der (in 86, II) wörtlich angegebene Werth von $\frac{D^n . \mathfrak{b}^m}{1.2..n}$ in einer combinatorischen Formel darstellen, wenn man nur einige Begriffe von Combinationen hat.

Die Darstellung aller Producte, jedes zu m (auch wiederholten) Buchstaben, zur Summe $m+n$, für welche Producte die möglichen Versetzungen, nicht wirklich gemacht, sondern nur durch eine vorgesetzte Zahl, die ihre Menge ausdrückt, angegeben werden sollen, deutet offenbar auf die m^{te} Combinationsclasse, M, mit Wiederholungen, zur Summe $m+n$, mit beygefügtem Polynomialcoefficienten oder der Versetzungszahl $\mathfrak{m}$; auf die Formel also,

$$\frac{D^n . \mathfrak{b}^m}{1.2..n} = \mathfrak{m}\,{}^{m+n}M$$

$$\begin{bmatrix} D.\mathfrak{b} = 1\,\gamma \\ D^2.\mathfrak{b} = 1.2\,\delta \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{b} & \gamma & \delta & \varepsilon \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \end{pmatrix}$$

wie sie bereits (62) ist aufgeführt worden.

89. Dieser Ausdruck durch $\mathfrak{m}$, M, m und n, nebst beygefügtem Zeiger, ist durchaus in meiner combinatorischen Zeichnung. Jener andere gleichviel bedeutende hingegen (86, I am Ende) mit den beyden Bedingungsgleichungen, ist, der äussern Form nach, ganz von dem meinigen, weniger aber von der gewöhnlichen algebraischen Sprache, verschieden. Solcher und ähnlicher Darstellungen hat sich neuerlich Prof. KRAMP

sehr scharfsinnig bedient β), und ihnen die Benennung combinatorischer Integrale oder Aggregate gegeben.

90. Was nun jenen Werth für $\frac{D^n . \mathfrak{G}^m}{1 . 2 \ldots n}$ (86, I am Ende) anbetrift, so fällt in die Augen, daſs hier alles auf der Auflösung und Genügeleistung der beiden Gleichungen für m und n beruht, und daſs man sich dabei um combinatorische Hülfe umsehen muſs, wenn man nicht in Weitläuftigkeit gerathen will; wie auch Professor Kramp gethan, der durch seine combinatorischen Integrale und dafür angewandten Hulfssätze viel geleistet hat.

Bey der kurzen Übersicht des Wenigen, was eigentlich hieher gehört, will ich das von Arbogast a. a O. aufgeführte Potenzen Product, auch hier beybehalten.

91. Bey jedem Producte von Potenzen, mit beygeschriebenen Zeiger- oder Stellen-Zahlen

$$\beta^p . \gamma^q . \delta^r . \epsilon^s . \zeta^t \ldots$$
$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \ldots$$

lassen sich drey Dinge deutlich unterscheiden, und theils einzeln, theils verschiedentlich mit einander verbunden, in Betrachtung ziehen:

Die Exponenten	p	q	r	s	t	
die Buchstaben	β	γ	δ	ϵ	ζ	
die Zahlen	1	2	3	4	5	

Für die Bestimmung der p, q, r, s . . . von welcher hier eigentlich die Rede ist, will ich drey Falle aufführen, die sich als so viel verschiedene Aufgaben betrachten lassen.

β) Sml. I. S, 102 — 122; Sml. II. S. 341 — 366; Kramp *Anal. des Refr. Astron. Chap. III.* Die Benennung combinatorische Integrale (Sml. II. S. 353, 363) combinatorische Aggregate (*Anal. des Refr. p.* 73, *no.* 97).

92. Es ist gegeben:

1) $p + q + r + s + t + \text{etc.} = m$,

die Summe der Exponenten $p, q, r, s, t \ldots\ldots$ der Buchstaben $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots\ldots$ ohne Rücksicht auf die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$;

oder 2) $1p + 2q + 3r + 4s + 5t + \text{etc} = n$,

die Summe der Vielfachen dieser Exponenten jener Buchstaben, in Rücksicht auf die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5 \ldots$,

oder 3) $p + q + r + s + t + \text{etc.} = m$,

$1p + 2q + 3r + 4s + 5t + \text{etc.} = n$,

die Summe der Exponenten und ihrer Vielfachen, nach (1 und 2):

Man soll die möglichen Auflösungen, d. i. die zusammen gehörigen Werthe der $p, q, r, s, t \ldots$ angeben, die diesen Gleichungen Genüge thun. Jede der Gröfsen $p, q, r, s, t \ldots$ kann eine ganze positive Zahl, oder auch 0, seyn.

93. Hier sind zwar die Gleichungen (1, 2, 3 in 92), als Bedingungsgleichungen, von dem Producte $\underset{1}{\beta^p}\,\underset{2}{\gamma^q}\,\underset{3}{\delta^r}\,\underset{4}{\varepsilon^s}\,\underset{5}{\zeta^t}\ldots$ abgeleitet; man sieht aber ein, dafs diese Gleichungen als unbestimmte, auch an sich betrachtet werden können, und dafs ihre Beziehung auf ein solches Product keinesweges nothwendig, wohl aber in anderer Rücksicht nützlich und brauchbar ist.

Erster Fall (92, 1)

94. Aufgabe. Für die unbestimmte Gleichung

$$p + q + r + s + t + \text{etc.} = m$$

die möglichen zusammen gehörigen Zahlenwerthe der $p, q, r, s, t \ldots$ anzugeben.

Auflösung I. Die Anzahl oder Menge der $p, q, r, s, t \ldots$ sey π, so fordert die Aufgabe, die Summe m aus π Zahlen, aber keinen andern als $0, 1, 2, 3, 4 \ldots m$,

auf alle mögliche Arten zusammen zu setzen; und so hängt denn die Aufgabe von der π^{ten} Variationsclasse, Π, zur Summe m, für den Zeiger 0, 1, 2, 3 . . . m, also von $\overset{\ldots s\,r\,q\,p}{{}^{m}\Pi}_{0,1,2\ldots m}$ ab, die sich durch eine leichte Involution ergiebt. (Zweyt. Anh.).

r	q	p	$\beta^p\,\gamma^q\,\delta^r$
0	0	4	β^4
0	1	3	$\beta^3\,\gamma$
0	2	2	$\beta^2\,\gamma^2$
0	3	1	$\beta^1\,\gamma^3$
0	4	0	γ^4
1	0	3	$\beta^3\,\delta^1$
1	1	2	$\beta^2\,\gamma^1\,\delta^1$
1	2	1	$\beta^1\,\gamma^2\,\delta^1$
1	3	0	$\gamma^3\,\delta^1$
2	0	2	$\beta^2\,\delta^2$
2	1	1	$\beta^1\,\gamma^1\,\delta^2$
2	2	0	$\gamma^2\,\delta^2$
3	0	1	$\beta^1\,\delta^3$
3	1	0	$\gamma^1\,\delta^3$
4	0	0	δ^4
δ	γ	β	

95. Exempel. Für $m = 4$ und p, q, r (wo $\pi = 3$) wäre also die dritte Variationsclasse, C, zur Summe 4, mit Wiederholungen, für den Zeiger 0, 1, 2, 3, 4, das ist $\overset{r\,q\,p}{{}^{4}C}_{(0,1,2,3,4)}$ zu construiren.

Von den beyden combinatorischen Anordnungen, hier zur Seite, enthält die erste oder die Zahleninvolution zur Summe 4, die lexikographisch geordneten Variationscomplexionen, deren einzelne Zahlen die zusammengehörigen Werthe der überschriebenen Exponenten p, q, r, d. i. die Exponenten der untergeschriebenen β, γ, δ, bestimmen. Beyder Verbindung giebt die zweyte Darstellung, wie sie hier unter $\beta^p\,\gamma^q\,\delta^r$ steht. Die Zahlen in der ersten sind variirt, die Buchstaben in der zweyten blos combinirt, auch sind die Buchstabencomplexionen einzeln gut geordnet, aber nicht in ihrer Folge, wie sie es seyn würden, wenn man der Zahlencolonne die Buchstaben β, γ, δ in dieser Ordnung unterschreiben, und die daher entstehenden Buchstabencomplexionen von unten herauf lesen wollte. Das führt auf folgende

96. Auflösung II. Man beziehe die $p, q, r, s \ldots$ auf die $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ (92), so läfst sich beyder Verbindung durch folgende Formel ausdrücken:

$$\underset{p+q+r+s\ldots=m}{\int[\beta^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s \ldots]} = \underset{(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\ldots)}{'M}$$

wo der Ausdruck linker Hand des Gleicheitszeichens das combinatorische Integral, mit der Bedingungsgleichung; der Ausdruck rechter Hand, die m^{te} Classe der Combinationen an sich (*simpliciter*), mit Wiederholungen, für die Elemente $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ andeutet, deren Entwickelung die Zahlenwerthe der $p, q, r, s \ldots$ in den einzelnen Complexionen zugleich aufführt.

Die Richtigkeit der Formel erhellt daraus, weil $\beta^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s \ldots$ für $p+q+r+s\ldots=m$, das allgemeine Glied der m^{ten} Classe, $'M$, der Combinationen überhaupt, darstellt; so, dafs jede aus m Buchstaben des Zeigers gegebene, Combinationscomplexion, durch gehörige Bestimmung der $p, q, r, s \ldots$ sich daraus ableiten läfst.

Für das Exempel (95), wo $m=4=p+q+r$, wäre $\underset{(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\ldots)}{'M} = \underset{(\beta,\gamma,\delta)}{'D}$. Die involutorischen Complexionen für diese Classe stehen (Sml. I. S. 174. β); man darf nur, von den dortigen *aaaa* an bis mit *cccc*, überall statt *a, b, c* hier β, γ, δ setzen.

97. Exempel 2. Für $p+q+r+s=2$, die möglichen zusammen gehörigen Werthe der p, q, r, s, sowohl an sich als in Beziehung auf die $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ anzugeben.

Hier ist $\pi=4$ und $m=2$: also

$$\overset{pqrs\ldots}{\underset{(0,1,2..m)}{\Pi}} = \overset{pqrs}{\underset{(0,1,2)}{{}^2D}} \text{ und } \underset{p+q+r+s=2}{\int[\beta^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s]} = \underset{(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)}{'B}$$

Das führt auf nachstehende Involutionen:

p	q	r	s				
0	0	0	2	$\beta^0\gamma^0\delta^0\varepsilon^2$	ε^2	β	β
0	0	1	1	$\beta^0\gamma^0\delta^1\varepsilon^1$	$\delta\varepsilon$	β	γ
0	0	2	0	$\beta^0\gamma^0\delta^2\varepsilon^0$	δ^2	β	δ
0	1	0	1	$\beta^0\gamma^1\delta^0\varepsilon^1$	$\gamma\varepsilon$	β	ε
0	1	1	0	$\beta^0\gamma^1\delta^1\varepsilon^0$	$\gamma\delta$	γ	γ
0	2	0	0	$\beta^0\gamma^2\delta^0\varepsilon^0$	γ^2	γ	δ
1	0	0	1	$\beta^1\gamma^0\delta^0\varepsilon^1$	$\beta\varepsilon$	γ	ε
1	0	1	0	$\beta^1\gamma^0\delta^1\varepsilon^0$	$\beta\delta$	δ	δ
1	1	0	0	$\beta^1\gamma^1\delta^0\varepsilon^0$	$\beta\gamma$	δ	ε
2	0	0	0	$\beta^2\gamma^0\delta^0\varepsilon^0$	β^2	ε	ε
β	γ	δ	ε				

Die Zahlen in der ersten Colonne, **unter** p, q, r, s und **über** β, γ, δ, ε sind, im ersten Falle die zusammen gehörigen Werthe für die p, q, r, s; im andern Falle die Potenzexponenten für die β, γ, δ, ε (zweyte und dritte Colonne). Die vierte Colonne stellt die gut geordneten Complexionen der Involution $\underset{(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)}{'B}$ vor (Sml. I. S. 174. β, nur β, γ, δ, ε statt der dortigen a, b, c, d gesetzt.

98. Für $\underset{(\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\ldots)}{'M} = \beta^m + \beta^{m-1}\,\underset{(\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta\ldots)}{'A} + \beta^{m-2}\,'B + \text{etc.} + \beta^0\,'M$ (Sml. I. S. 215, 84) lassen sich die Classen $'A, 'B, 'C \ldots 'M$, leicht von einander ableiten (a. a. O. S 174, α). Diese Relation, obschon nicht in diesen Zeichen, hat schon Jac. Bernoulli (*Opp. T. II. p.* 993—996) benutzt, die Reihe für $(a+b+c+\text{etc.})^m$ zu finden. Auch hier werden (für die dortigen a, b, c, d ... statt der hiesigen β, γ, δ, ε ...) Litteralproducte $a^p b^q c^r d^s \ldots$ von ihren Versetzungszahlen getrennt und besonders betrachtet, auch wird dabey die Bedingungsgleichung $p+q+r+s+\text{etc.} = m$ aufgeführt.

Zweyter Fall [92, 2)

99. Aufgabe. Für die unbestimmte Gleichung

$$1p + 2q + 3r + 4t + \text{etc.} = n$$

die möglichen zusammen gehörigen Zahlenwerthe der $p, q, r, s \ldots$ anzugeben.

Auflösung. Die Beziehung der $p, q, r, s \ldots$ auf $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ giebt das combinatorische Integral

$$\int [\beta^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s \ldots.] = {}^n\mathrm{J} = {}^n\mathfrak{J}$$

$$1p+2q+3r+4s+\text{etc.} \begin{pmatrix} \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots \\ 1, 2, 3, 4 \ldots \end{pmatrix}$$

nachdem man die Complexionen arithmographisch oder lexikographisch entwickeln will. (Sml. I. 183).

Beyspiel, für $n = 7$ oder ${}^7\mathfrak{J}$ (Samml. I. S. 200) und hier die Involution β^{n-1} [β] etc. [Zweyter Anh.] das dortige $n = 7$ gesetzt).

	1 p	2 q	3 r	4 s	5 t	6 u	7 v
β^7	7	0	0	0	0	0	0
$\beta^5\gamma^1$	5	1	0	0	0	0	0
$\beta^4\delta^1$	4	0	1	0	0	0	0
$\beta^3\gamma^2$	3	2	0	0	0	0	0
$\beta^3\varepsilon^1$	3	0	0	1	0	0	0
$\beta^2\gamma^1\delta^1$	2	1	1	0	0	0	0
$\beta^2\zeta^1$	2	0	0	0	1	0	0
$\beta^1\gamma^3$	1	3	0	0	0	0	0
$\beta^1\gamma^1\varepsilon^1$	1	1	0	1	0	0	0
$\beta^1\delta^2$	1	0	2	0	0	0	0
$\beta^1\eta^1$	1	0	0	0	0	1	0
$\gamma^2\delta^1$	0	2	1	0	0	0	0
$\gamma^1\zeta^1$	0	1	0	0	1	0	0
$\delta^1\varepsilon^1$	0	0	1	1	0	0	0
θ^1	0	0	0	0	0	0	1
	β 1	γ 2	δ 3	ε 4	ζ 5	η 6	θ 7

Die Buchstabencomplexionen in der ersten Colonne sind lexikographisch geordnet gerade so, wie sie kommen würden, wenn man in der allgemeinen Formel (a. a. O.) $n = 7$ setzte; wo also $\beta^{n-7}\theta$ d. i. $\beta^0\theta = \theta$ die letzte seyn würde.

Für die arithmographische Folge vor- und rückwärts, ist (Sml. I. S. 200)

$$^{n}J = \left\{\begin{matrix} ^{n}A + {}^{n}B + {}^{n}C + {}^{n}D + {}^{n}E + {}^{n}F + {}^{n}G \\ ^{n}G + {}^{n}F + {}^{n}E + {}^{n}D + {}^{n}C + {}^{n}B + {}^{n}A \end{matrix}\right\}$$

Die Classen rückwärts, aber ihre Complexionen vorwärts gelesen, geben das Krampische Zahlentäfelchen (Sml. II. S. 356) f r die dortigen $\beta, \gamma, \delta, \ldots \theta$, von dem hiesigen (in der zweyten Colonne) blos in der Ordnung etwas verschieden. Man vergleiche die ^{n}A, $^{n}B \ldots {}^{n}G$ (*Infin. Dign. p.* 167) statt der dortigen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ hier $\beta, \gamma, \delta \ldots$ gesetzt.

100. Im Zahlentäfelchen (99) sind die Zahlen zwischen $\beta, \gamma, \delta \ldots \theta$ und $p, q, r \ldots v$ die Exponenten der erstern und zugleich die Werthe der letztern: auch kommen die Stellenzahlen 1, 2, 3 . . . 7 unter $\beta, \gamma, \delta \ldots \theta$, mit den Vielfachen über $p, q, r \ldots v$ überein. Die Exponenten der $\beta, \gamma, \delta \ldots$ mit ihren Stellzahlen multiplicirt, geben also so viel, als die Werthe der $p, q, r \ldots$ mit ihren Vielfachen; woraus die Richtigkeit der Auflösung (99) erhellet.

Eine Auflösung durch Variationscomplexionen, wie im ersten Falle (94, 95) würde wegen der mehreren Summen $n, n-1, n-2 \ldots$ die man hier in Betrachtung zu ziehen hätte, in Weitläuftigkeit führen. Die gegebene, durch bloſse Combinationscomplexionen, ist äusserst leicht und kurz.

Dritter Fall (92. 3)

101. Aufgabe. Für die unbestimmten Gleichungen

$$p + q + r + s + t + \text{etc.} = m$$
$$1p + 2q + 3r + 4s + 5t + \text{etc.} = n$$

die zusammen gehörigen, beiden Gleichungen Genüge leistenden, Zahlenwerthe der p, q, r, s, t, etc. anzugeben.

Auflösung. Die Beziehung der p, q, r, s, t .., auf β, γ, δ, ε, ζ . . . giebt das combinatorische Integral

$$\int [\beta^p \gamma^q \delta^r \varepsilon^s \zeta^t \ldots] = {}^n M \quad \begin{matrix} p + q + r + s + t + \text{etc.} = m \\ 1p + 2q + 3r + 4s + 5t + \text{etc.} = n \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \ldots \\ 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \end{pmatrix}$$

Das Integral mit den Bedingungsgleichungen führt also auf die m^{te} Combinationsclasse für den untergesetzten Zeiger. Nämlich die Gleichung für n, bestimmt ${}^n I$ (99). Von den Combinationsclassen ${}^n A$, ${}^n B$, ${}^n C$... dieser Involution kann aber, wegen der Gleichung für m, nur die m^{te} Classe, das ist ${}^n M =$ statt finden.

Beyspiel. Für $m = 6$ und $n = 10$, wäre ${}^n M = {}^{10} F$, also, für obigen Zeiger,

	1	2	3	4	5	6
	p	q	r	s	t	u
$\beta^5 \zeta^1$	5	0	0	0	1	0
$\beta^4 \gamma^1 \varepsilon^1$	4	1	0	1	0	0
$\beta^4 \delta^2$	4	0	2	0	0	0
$\beta^3 \gamma^2 \delta^1$	3	2	1	0	0	0
$\beta^2 \gamma^4$	2	4	0	0	0	0
	β	γ	δ	ε	ζ	η
	1	2	3	4	5	6

Die Summe, 1) der Werthe der einzelnen p, q, r . . . ist hier überall $= 6$; 2) und ihrer Producte $1p$, $2q$, $3r$. . . überall $= 10$. Eben so das Krampische Zahlentäfelchen (Sml. I. S. 112).

102. Wären (in 101) die Bedingungsgleichungen

$$p + q + r + s + \text{etc.} = m$$
$$1q + 2r + 3s + \text{etc.} = n$$

gegeben (86, I) so darf man nur, nach der zweyten Gleichung, ^{n}J oder $^{n,r}\mathfrak{J}$ entwickeln, und für jede Complexion der zusammengehörigen Werthe von p, q, r . . . die Ergänzung zu m, als den Werth für p, hinzusetzen.

Exempel. Für $m = 10$, $n = 6$, wäre

$$^{6}J = {}^{6}F + {}^{6}E + {}^{6}D + {}^{6}C + {}^{6}B + {}^{6}A, \text{ also}$$

	1	2	3	4	5	6	
p . . .	q	r	s	t	u	v	
4 . . .	6	0	0	0	0	0	β^6
5 . . .	4	1	0	0	0	0	$\beta^4\,\gamma^1$
6 . . .	3	0	1	0	0	0	$\beta^3\,\delta^1$
6 . . .	2	2	0	0	0	0	$\beta^2\,\gamma^2$
7 . . .	2	0	0	1	0	0	$\beta^2\,\varepsilon^1$
7 . . .	1	1	1	0	0	0	$\beta^1\,\gamma^1\,\delta^1$
7 . . .	0	3	0	0	0	0	γ^3
8 . . .	1	0	0	0	1	0	$\beta^1\,\zeta^1$
8 . . .	0	1	0	1	0	0	$\gamma^1\,\varepsilon^1$
8 . . .	0	0	2	0	0	0	δ^2
9 . . .	0	0	0	0	0	1	ζ^1
	β	γ	δ	ε	ζ	η	
	1	2	3	4	5	6	

wie bey KRAMP (Sml. II. S. 364). Über die combinatorische Behandlung dieser und anderer ähnlichen Aufgaben (wie die in 92; 1, 2, 3) vergleiche man WEINGÄRTNERS Lehrb. der combin. Analysis. II Th. S. 133 f. f.

103. So viel hiervon, blos um zu zeigen, welche Erleichterung die Combinationslehre hier verschaft. Anwendungen solcher combinatorischen Integrale gehören nicht hieher; viele und vortreffliche hat Prof. KRAMP gegeben. Auch hat neuerlich Prof. ROTHE eine Theorie der combinatorischen Integrale und ihrer Anwendung versucht. Ihr Umfang erstreckt sich weit,

und was mir davon von Zeit zu Zeit ist mitgetheilt worden, verdient grofse Aufmerksamkeit. Was man sich davon zu versprechen habe, mag folgender Auszug aus einem seiner neuesten Briefe aus Dresden darlegen.

„Ich habe wieder (schreibt er mir unterm 15. Jan. 1803) sehr viel an den combinatorischen Integralen gearbeitet, und ihre Theorie um ein Merkliches erweitert. Je weiter ich darinn fortschreite, desto mehr überzeuge ich mich von ihrer Wichtigkeit und Kraft. Durch sie ist es mir ganz neuerlich gelungen, die in §. VI. meiner Dissertation (*de Serierum Reversione*, 1793) gegebene allgemeine Summation, durch Zerlegung der Formel in ihre einfachsten Bestandtheile, ganz kurz zu erweisen. Allein ich mufste vorher die Betrachtung einer ganz besondern Art combinatorisscher Integrale voraus schicken. Ich habe viel Neues dadurch in kurzer Zeit gefunden, und ich halte sie für so wichtig, als die Involutionen. Ich weifs es, ich sage viel, aber ich glaube, es beweisen zu können. Ich werde sie auf das sogenannte Erhöhungsproblem anwenden, und ich hoffe, durch sie in Stand gesetzt zu werden, dieses Problem (das aber immer nur ein specieller Fall oder Theil des weitläuftigen und vielumfassenden Eliminationsproblems ist) vollständig auflösen zu können. Vorher will ich aber noch Haubers Aufsatz darüber (Sml. II. c. a. A. Seite 232, f.) durchgehen und damit vergleichen."

„Sollte es nicht Zeit seyn, etwas darüber und über den Algorithmus, dessen diese neu gefundenen combinatorischen Integrale fähig sind, bekannt γ) zu ma-

γ) Das würde schon früher, in einem eignen Aufsatze zu diesen, geschehen seyn, der im Gefolge mehrerer, als dritte Sammlung comb. anal. Abhandlungen, oder als

chen? Ich bin gewifs überzeugt, sie werden die Aufmerksamkeit der Analysten auf sich ziehen."

„Zum Beweise, wie kurz durch sie gewisse Relationen oder Lehrsätze ausgedrückt werden können, führe ich nur die oben erwähnte Formel meiner Dissertation. (§. VI) auf. Es ist nämlich das combinatorische Integral

$$\int \frac{s+\alpha c}{(f+\alpha d)(g-\alpha d)} \cdot q^{f+\alpha d} \varkappa (\alpha+1) \cdot q^{g-\alpha d} \varkappa (\beta+1)$$
$$\alpha + \beta = n$$
$$= \frac{s(f+g)+n(cf-ds)}{f(f+g)(g-nd)} \cdot q^{s+g} \varkappa (n+1)$$

Die Bedingungsgleichung ist bier $\alpha + \beta = n$

„Als Beyspiele von neuen Wahrheiten, die ich durch meine combinatorischen Integrale gefunden habe, mögen folgende dienen. δ) — Nur eins läfst sich hier mittheilen: die Summation nämlich, der unendlichen von PFAFF summirten Reihe (Arch. der Math. 5tes Heft, S. 73 § 12). PFAFF summirt nämlich die dortige Reihe auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, vermittelst einer andern, wo eine neue Scale U vorkommt, deren allgemeine Dependenz von der Scale u durch die Formel $U \varkappa n = n . u \varkappa (n+1)$ ausgedrückt wird. Ich habe aber gefunden, dafs, wenn p, r, s willkührliche Scalen bedeuten, dann

$$(rp^{f}) \varkappa 1 (sp^{g}) \varkappa (n+1) + (rp^{f+d}) \varkappa 2 (sp^{g-d}) \varkappa n$$
$$+ (rp^{f+2d}) \varkappa 3 (sp^{g-2d}) \varkappa (n-1) + \cdots\cdots$$
$$+ (rp^{f+nd}) \varkappa (n+1) (sp^{g-nd}) \varkappa 1 = \frac{p^{f+g+1}}{p} . rs) \varkappa (n+1)$$

Beyträge dazu, erschienen seyn würden, wenn der so grofse Aufenthalt beym Druck, die Ausgabe nicht zu lange verzögert hätte.

δ) Sie waren in einer Beylage aufgeführt, und würden hier, theils zu weitläuftig, theils, ohne beygefügte Erläuterung, nicht verständlich seyn. Nur eins davon kann ich hier mittheilen, und oben im Texte anführen.

welche Summation weit kürzer ist. P ist hier eine neue von p abhängige Scale, und die Dependenz derselben von der Scale p drückt die Formel

$$P\varkappa(n+1)=(1-nd)p\varkappa(n+1)$$

aus, das heiſst, es ist

$$P[p\varkappa 1, (1-d)p\varkappa 2, (1-2d)p\varkappa 3, (1-3d)p\varkappa 4, \ldots]$$"

SIEBENTER ABSCHNITT.

Derivative und combinatorische Entwickelung der Producte zweyer oder mehrerer Polynomien, in Reihen, deren Glieder nach den Potenzen eines und desselben Buchstabens geordnet sind.

104. Ich werde mich über diesen Gegenstand, der mit dem vorigen in naher Verbindung stehet, kurz fassen, und will hier nur die einfachsten Reihen anführen. Es ist vortheilhaft, wie auch [no. 85] bemerkt wird, diesen Fall besonders abzuhandeln, theils, weil er sehr oft vorkommt, theils, weil er der Auflösung des verwickeltern allgemeinen Falls zum Grunde liegt und sie erleichtert.

I. Derivative Entwickelung der Producte mehrerer Reihen [no. 86 — 92].

Sie soll gröſstentheils mit den eignen Worten ihres Verfassers (in einer freyen Übersetzung) vorgetragen werden. Man kann sich nicht deutlicher darüber erklären, als es dort geschehen ist.

105. Aufgabe. Das Product einer beliebigen Anzahl von einander ganz unabhängiger Polynomien, deren jedes nach Potenzen von x geordnet ist, in einer Reihe von der Gestalt

$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc.

zu entwickeln.

Um von dem einfachsten Fall anzufangen, suche man zuerst das Product von zwey Reihen

$$(a + bx + cx^2 + \text{etc.}) \times (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \text{etc.})$$

in der angegebenen Gestalt zu entwickeln.

Die Multiplication beyder Reihen giebt folgende, nach Potenzen von x geordnete, Glieder

$a\alpha + a\beta$	$x + a\gamma$	$x^2 + a\delta$	x^3
$+ b\alpha$	$+ b\beta$	$+ b\gamma$	+ etc.
	$+ c\alpha$	$+ c\beta$	
		$+ d\alpha$	

Das Gesetz der Gröſsen, die hier in die Potenzen von x multiplicirt sind, ist ganz einfach; der Coefficient jeder unbestimmten Potenz, x^n, läſst sich leicht daraus übersehen.

Um diese Auflösung auf Derivationen zurück zu führen, bemerke man, daſs $b = \text{D}.a$, $c = \frac{\text{D}^2.a}{1.2}$, $d = \frac{\text{D}^3.a}{1.2.3}$, etc.; $\beta = \text{D}.\alpha$, $\gamma = \frac{\text{D}^2.\alpha}{1.2}$, $\delta = \frac{\text{D}^3.\alpha}{1.2.3}$, etc.; $A = a\alpha$, welches der Anfang (*Origine*) der Derivationen ist, $B = \text{D}.(a\alpha)$, $C = \frac{\text{D}^2.(a\alpha)}{1.2}$, $D = \frac{\text{D}^3.(a\alpha)}{1.2.3}$, etc. Diese derivativen Ausdrüc statt der obigen Buchstaben gesetzt, geben

$$A = a\alpha$$

$$B = \mathrm{D}.(a\alpha) = a.\,\mathrm{D}.\alpha + \mathrm{D}.a.\alpha$$

$$C = \frac{\mathrm{D}^2.(a\alpha)}{1.2} = a.\frac{\mathrm{D}^2.\alpha}{1.2} + \mathrm{D}.a.\mathrm{D}.\alpha + \frac{\mathrm{D}^2.a}{1.2}.\alpha$$

$$D = \frac{\mathrm{D}^3.(a\alpha)}{1.2.3} = a.\frac{\mathrm{D}^3.\alpha}{1.2.3} + \mathrm{D}.a.\frac{\mathrm{D}^2\alpha}{1.2} + \frac{\mathrm{D}^2.a}{1.2}.\mathrm{D}.\alpha + \frac{\mathrm{D}^3.a}{1.2.3}.\alpha$$

106. Lehrsatz. Es seyen a und α von einander unabhängige Gröſsen, so wie ihre derivirten; die *dérivée divisée* (34) der Ordnung n des Products $a\alpha$, ist durch folgende Formel gegeben

$$\frac{\mathrm{D}^n.(a\alpha)}{1.2..n} = a.\frac{\mathrm{D}^n.\alpha}{1.2..n} + \mathrm{D}.a.\frac{\mathrm{D}^{n-1}.\alpha}{1.2..n-1} + \frac{\mathrm{D}^2.a}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^{n-2}.\alpha}{1.2..n-2} + \frac{\mathrm{D}^3.a}{1.2.3}.\frac{\mathrm{D}^{n-3}.\alpha}{1.2..n-3} + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^{n-1}.a}{1.2..n-1}.\mathrm{D}.\alpha + \frac{\mathrm{D}^n.a}{1.2..n}.\alpha$$

wo, abgesehen von den Divisoren 1.2.3..., die Glieder keine andern Zahlencoefficienten, als die Einheit haben.

107. Setzt man in diese Formel $n+1$ statt n, so kommt

$$\frac{\mathrm{D}^{n+1}.(a\alpha)}{1.2..n+1} = a.\frac{\mathrm{D}^{n+1}.\alpha}{1.2..n+1} + \mathrm{D}.a.\frac{\mathrm{D}^n.\alpha}{1.2..n} + \frac{\mathrm{D}^2.a}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^{n-1}.\alpha}{1.2..n-1} + \frac{\mathrm{D}^3.a}{1.2.3}.\frac{\mathrm{D}^{n-2}.\alpha}{1.2..n-2} + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^{n-1}.a}{1.2..n-1}.\frac{\mathrm{D}^2.\alpha}{1.2} + \frac{\mathrm{D}^n.a}{1.2..n}.\mathrm{D}.\alpha + \frac{\mathrm{D}^{n+1}.a}{1.2..n+1}.\alpha$$

Die Vergleichung dieser Formel mit der vorhergehenden, giebt folgende Derivationsregel

Aus den gegebenen Gliedern von $\frac{D^n.(a\alpha)}{1.2..n}$, *für unabhängige a und α, die Glieder von* $\frac{D^{n+1}.(a\alpha)}{1.2..n+1}$ *abzuleiten: 1) variire man in jedem einzelnen Gliede blos α oder seine* derivée, *und nehme davon die folgende* derivée divisée, *lasse aber a und seine* derivées *unverändert; 2) in dem einzigen Gliede, welches α und die höchste* derivée *von a enthält, variire man auch noch die* derivée *von a, und nehme davon die folgende* derivée divisée; *lasse aber den Factor α, wie er ist, unverändert.*

Vermittelst dieser Regel findet man nach und nach, augenblicklich, aus $A = a\alpha$,

$$B = a\beta + b\alpha$$
$$C = a\gamma + b\beta + c\alpha$$
$$D = a\delta + b\gamma + c\beta + d\alpha$$
$$E = a\varepsilon + b\delta + c\gamma + d\beta + e\alpha$$

u. s. w. wie in (105).

Der Lehrsatz (106) und die obige Regel sind hinreichend, das Product oder jedes beliebige Glied des Products, jeder willkührlichen Menge von Polynomien zu entwickeln; wie aus folgender Anwendung auf Producte von drey und vier Polynomien deutlich erhellen wird.

108. Das Product von drey Polynomien

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 + \text{etc.}$$
$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$
$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$$

in einer Reihe von der Gestalt

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

zu entwickeln.

Das Glied ohne x, oder $A = \mathfrak{a}a\alpha$, ist der Anfang (*origine*) der Derivationen. Man sehe das Product $\mathfrak{a}a$ als eine einfache Gröſse p an, so, daſs $A = p\alpha$. Dadurch wird das Problem auf das vorhergehende zurückgeführt. Demnach ist (105)

$$A_n = \frac{D^n.(\mathfrak{a}a\alpha)}{1.2..n} = \frac{D^n.(p\alpha)}{1.2..n}$$

$$= \left(\begin{array}{l} \mathfrak{a}a.\dfrac{D^n.\alpha.}{1.2..n} + D.(\mathfrak{a}\alpha).\dfrac{D^{n-1}.\alpha}{1.2..n-1} + \dfrac{D^2.(\mathfrak{a}\alpha)}{1.2}.\dfrac{D^{n-2}.\alpha}{1.2..n-2} \\ + \text{etc.} + \dfrac{D^{n-1}.(\mathfrak{a}a)}{1.2..n-1}.D.\alpha + \dfrac{D^n.(\mathfrak{a}a)}{1.2..n}.\alpha \end{array} \right)$$

Die Gröſsen, zwischen den kleinen Parenthesen, sind hier der Regel (107) unterworfen.

Das giebt eine sehr leichte derivative Entwickelung der Glieder nach der Ordnung, und man findet augenblicklich

$$A = \mathfrak{a}a.\alpha$$
$$B = \mathfrak{a}a.\beta + (\mathfrak{a}b + \mathfrak{b}a)\alpha$$
$$C = \mathfrak{a}a.\gamma + (\mathfrak{a}b + \mathfrak{b}a)\beta + (\mathfrak{a}c + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}a)\alpha$$
$$D = \mathfrak{a}a.\delta + (\mathfrak{a}b + \mathfrak{b}a)\gamma + (\mathfrak{a}c + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}a)\beta$$
$$+ (\mathfrak{a}d + \mathfrak{b}c + \mathfrak{c}b + \mathfrak{d}a)\alpha$$

u. s. w. Es fällt in die Augen, daſs z. B. um E von D abzuleiten, man in D nur die $\delta, \gamma, \beta, \alpha$ mit $\varepsilon, \delta, \gamma, \beta$ respective vertauschen, und eine Derivation von der einzigen Gröſse $(\mathfrak{a}d + \mathfrak{b}c + \mathfrak{c}b + \mathfrak{d}a)$ machen dürfe, welche α multiplicirt.

109. Das Product von vier Polynomien

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \mathfrak{D}x^3 + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 + \text{etc.}$$
$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$
$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$$

in einer Reihe von der Gestalt

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

zu entwickeln.

Der Anfang der Derivation ist $A = \mathfrak{A}\mathfrak{a}a\alpha$. Diesen zerfälle man in die beyden Factoren $\mathfrak{A}\mathfrak{a}a$ und α, und betrachte $\mathfrak{A}\mathfrak{a}a$ als eine einfache Gröſse, so ist, nach dem Lehrsatz (106)

$$\frac{\mathrm{D}^n}{1.2..n}(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\alpha) = \mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\frac{\mathrm{D}^n.\alpha}{1.2..n} + \mathrm{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\frac{\mathrm{D}^{n-1}.\alpha}{1.2..n-1}$$

$$+ \frac{\mathrm{D}^2.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^{n-2}.\alpha}{1.2..n-2} + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)}{1.2..n}.\alpha$$

wo man $\mathrm{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)$, $\frac{\mathrm{D}^2}{1.2}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)$ etc., wie vorher gezeigt worden ist, entwickelt.

Durch Derivation findet man die Coefficienten der successiven Glieder der Reihe, wie folget:

$$\begin{aligned}
A &= \mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\alpha \\
B &= \mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\beta + [\mathfrak{A}\mathfrak{a}.b + \mathrm{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}).a]\alpha \\
&= \mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\beta + [\mathfrak{A}\mathfrak{a}.b + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})a]\alpha \\
C &= \mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\gamma + [\mathfrak{A}\mathfrak{a}.b + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})a]\beta \\
&\quad + [\mathfrak{A}\mathfrak{a}.c + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})b + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})a]\alpha \\
D &= \mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\delta + [\mathfrak{A}\mathfrak{a}.b + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})a]\gamma \\
&\quad + [\mathfrak{A}\mathfrak{a}.c + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})b + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})a]\beta \\
&\quad + \left[\begin{aligned}&\mathfrak{A}\mathfrak{a}.d + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})c + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})b \\ &\quad + (\mathfrak{A}\mathfrak{d} + \mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}\mathfrak{b} + \mathfrak{D}\mathfrak{a})\,a\end{aligned}\right]\alpha
\end{aligned}$$

u. s. w. Mit gehöriger Aufmerksamkeit auf die Einklammerungen (*emboîtemens*) fährt man mit gröſster Leichtigkeit so weit fort als man will.

110. Zerlegte man $\mathfrak{A}\mathfrak{a}a\alpha$ in die beyden Factoren $\mathfrak{A}\mathfrak{a}$ und $a\alpha$, so fände man durch Derivation folgende, blos der Form nach von der vorhergehenden verschiedene, Entwickelung

$$A = \mathfrak{A}\mathfrak{a}.\,a\alpha$$
$$B = \mathfrak{A}\mathfrak{a}(a\beta + b\alpha) + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})\,a\alpha$$
$$C = \mathfrak{A}\mathfrak{a}(a\gamma + b\beta + c\alpha) + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a}) \times (a\beta + b\alpha) + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})\,a\alpha$$
$$D = \mathfrak{A}\mathfrak{a}(a\delta + b\gamma + c\beta + d\alpha) + (\mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}\mathfrak{a})(a\gamma + b\beta + c\alpha) + (\mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}\mathfrak{a})(a\beta + b\alpha) + (\mathfrak{A}\mathfrak{d} + \mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}\mathfrak{b} + \mathfrak{D}\mathfrak{a})\,a\alpha$$

u. s. w.

111. Man kann $\mathfrak{A}\mathfrak{a}\,a\alpha$ auf dreyerley Art in Factoren abtheilen: nämlich

$$A_n = \frac{\mathrm{D}^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\,a.\alpha)}{1.2..n} = \frac{\mathrm{D}^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}.\,a\alpha)}{1.2..n} = \frac{\mathrm{D}^n.(\mathfrak{A}.\,\mathfrak{a}\,a\alpha)}{1.2..n}$$

$$= \mathfrak{A}\mathfrak{a}\,a\,\frac{\mathrm{D}^n.\alpha}{1.2..n} + \mathrm{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\,a).\frac{\mathrm{D}^{n-1}.\alpha}{1.2..n-1} + \frac{\mathrm{D}^2.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\,a)}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^{n-2}\alpha}{1.2..n-2} + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\,a)}{1.2..n}.\alpha$$

$$= \mathfrak{A}\mathfrak{a}\,\frac{\mathrm{D}^n.(a\alpha)}{1.2..n} + \mathrm{D}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a})\,\frac{\mathrm{D}^{n-1}.(a\alpha)}{1.2..n-1} + \frac{\mathrm{D}^2.(\mathfrak{A}\mathfrak{a})}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^{n-2}.(a\alpha)}{1.2..n-2} + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}}{1.2..n}.a\alpha$$

$$= \mathfrak{A}.\,\frac{\mathrm{D}^n.(\mathfrak{a}\,a\alpha)}{1.2..n} + \mathrm{D}.\mathfrak{A}\,\frac{\mathrm{D}^{n-1}.(\mathfrak{a}\,a\alpha)}{1.2..n-1} + \frac{\mathrm{D}^2.\mathfrak{A}}{1.2}.\frac{\mathrm{D}^{n-2}.(\mathfrak{a}\,a\alpha)}{1.2..n-2} + \text{etc.} + \frac{\mathrm{D}^n.\mathfrak{A}}{1.2..n}.\mathfrak{a}\,a\alpha$$

112. Nichts ist leichter, als jedes verlangte Glied, unabhängig von den vorhergehenden, durch Derivation zu entwickeln.

Exempel. Man verlangt das 5^te Glied des Products der Polynomien

$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+$ etc., $\quad \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+$ etc.,
$a+b+c+$ etc., $\quad \alpha+\beta+\gamma+$ etc.

Hier ist $A=\mathfrak{A}\mathfrak{a}a\alpha$, der Anfang der Derivation; das 5te Glied wird durch $\frac{D^4.\mathfrak{A}\mathfrak{a}a\alpha}{1.2.3.4}$ bezeichnet.

Eine erste Entwickelung giebt

$$A_4=\mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\varepsilon+D.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)\delta+\frac{D^2.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)}{1.2}.\gamma$$
$$+\frac{D^3.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)}{1.2.3}.\beta+\frac{D^4.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)}{1.2.3.4}.\alpha$$

und nun calculirt und derivirt man die Entwickelungen von $D.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)$, $\frac{D^2.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)}{1.2}$, u. s. w. ohne Schwierigkeit hinter einander, wie folget

$$D.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)=\mathfrak{A}\mathfrak{a}.b+(\mathfrak{A}\mathfrak{b}+\mathfrak{B}\mathfrak{a})a$$
$$\frac{D^2.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)}{1.2}=\mathfrak{A}\mathfrak{a}.c+(\mathfrak{A}\mathfrak{b}+\mathfrak{B}\mathfrak{a})b$$
$$+(\mathfrak{A}\mathfrak{c}+\mathfrak{B}\mathfrak{b}+\mathfrak{C}\mathfrak{a})a$$
$$\frac{D^3.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)}{1.2.3}=\mathfrak{A}\mathfrak{a}.d+(\mathfrak{A}\mathfrak{b}+\mathfrak{B}\mathfrak{a})c+(\mathfrak{A}\mathfrak{c}+\mathfrak{B}\mathfrak{b}+\mathfrak{C}\mathfrak{a})b$$
$$+(\mathfrak{A}\mathfrak{d}+\mathfrak{B}\mathfrak{c}+\mathfrak{C}\mathfrak{b}+\mathfrak{D}\mathfrak{a})a$$
$$\frac{D^4.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a)}{1.2.3.4}=\mathfrak{A}\mathfrak{a}.e+(\mathfrak{A}\mathfrak{b}+\mathfrak{B}\mathfrak{a})d+(\mathfrak{A}\mathfrak{c}+\mathfrak{B}\mathfrak{b}+\mathfrak{C}\mathfrak{a})c$$
$$+(\mathfrak{A}\mathfrak{d}+\mathfrak{B}\mathfrak{c}+\mathfrak{C}\mathfrak{b}+\mathfrak{D}\mathfrak{a})b$$
$$+(\mathfrak{A}\mathfrak{e}+\mathfrak{B}\mathfrak{d}+\mathfrak{C}\mathfrak{c}+\mathfrak{D}\mathfrak{b}+\mathfrak{E}\mathfrak{a})a$$

So findet man für A_4, ganz entwickelt,

$$A_4=\mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\varepsilon+[\mathfrak{A}\mathfrak{a}b+(\mathfrak{A}\mathfrak{b}+\mathfrak{B}\mathfrak{a})a]\delta$$
$$+[\mathfrak{A}\mathfrak{a}c+(\mathfrak{A}\mathfrak{b}+\mathfrak{B}\mathfrak{a})b+(\mathfrak{A}\mathfrak{c}+\mathfrak{B}\mathfrak{b}+\mathfrak{C}\mathfrak{a})a]\gamma$$
$$+\left[\begin{array}{l}\mathfrak{A}\mathfrak{a}d+(\mathfrak{A}\mathfrak{b}+\mathfrak{A}\mathfrak{a})c+(\mathfrak{A}\mathfrak{c}+\mathfrak{B}\mathfrak{b}+\mathfrak{C}\mathfrak{a})b\\ \quad+(\mathfrak{a}\mathfrak{d}+\mathfrak{B}\mathfrak{c}+\mathfrak{C}\mathfrak{b}+\mathfrak{D}\mathfrak{a})a\end{array}\right]\beta$$
$$+\left[\begin{array}{l}\mathfrak{A}\mathfrak{a}e+(\mathfrak{A}\mathfrak{b}+\mathfrak{B}\mathfrak{a})d+(\mathfrak{A}\mathfrak{c}+\mathfrak{B}\mathfrak{b}+\mathfrak{C}\mathfrak{a})c\\ \quad+(\mathfrak{A}\mathfrak{d}+\mathfrak{B}\mathfrak{c}+\mathfrak{C}\mathfrak{b}+\mathfrak{D}\mathfrak{a})b\\ \quad+(\mathfrak{A}\mathfrak{e}+\mathfrak{B}\mathfrak{d}+\mathfrak{C}\mathfrak{c}+\mathfrak{D}\mathfrak{b}+\mathfrak{E}\mathfrak{a})a\end{array}\right]\alpha$$

113. Aus den generellen Formeln (106, 107) läſst sich noch nachstehende Regel folgern, um eine *dérivée divisée* aus der *dérivée divisée* der zunächst höhern Ordnung abzuleiten:

Um von der gegebenen Entwickelung von $\frac{\mathrm{D}^n.(a\alpha)}{1.2..n}$ *auf die von* $\frac{\mathrm{D}^{n-1}.(a\alpha)}{1.2..n-1}$ *herabzusteigen, werfe man das Glied weg, worinn* α *mit der höchsten* dérivee divisée *von* a *multiplicirt ist, und vertausche in den übrigen Gliedern jede* dérivée divisée *von* α, *mit der zugehörigen* dérivée divisée inverse. (73. p. 243).

Diese Regel gehörig ausgedehnt, erstreckt sich auf die *dérivées* eines Products von jeder willkührlichen Anzahl polynomischer Factoren; wie man finden wird, wenn man sie auf die Fälle (108, 109) anwendet und bemerkt, wie jede der Gröſsen A, B, C, D, . . , aus der unmittelbar folgenden derivirt.

So weit der Arbogastische Vortrag. Ich gehe nun zu den combinatorischen Darstellungen fort.

II. Combinatorische Entwickelung der Producte mehrerer Reihen.

114. Vorerinnerungen.

1. Zwey, drey, vier oder mehrere Reihen multipliciren, heiſst die möglichen Binionen, Ternionen, Quaternionen, u. s. w. aus ihren Gliedern aufstellen. Eine gewisse Ordnung dabey zu beobachten, setze man die Glieder einer und derselben Reihe immer in eine und dieselbe Stelle der einzelnen Producte oder Complexionen.

2. Sollen die Glieder, wie hier erfordert wird (105) nach Potenzen einer veränderlichen Gröſse (x) fortgehen, so können nur diejenigen Producte der Coeffi-

cienten der einzelnen Reihen, zu einer und derselben Potenz von x gehören, deren Zahlenwerthe, nach dem gemeinschaftlichen Zeiger, einerley Summe ausmachen.

3. Das führt, weil dabey Verwechselungen s) vorkommen, auf Variationen zu bestimmten Summen, für bestimmte Reihen. Bezeichnet man nun die Variationsclassen nach der Ordnung durch grofse lateinische Cursivbuchstaben, A, B, C, D, . . . M, setzt den Summenexponenten oben linker Hand zur Seite, die Reihenbuchstaben p, q, r, s . . . darüber und den Zeiger darunter: so sind Ausdrucke, wie folgende

$$\overset{pq}{{}^{5}B}, \quad \overset{pqr}{{}^{6}C}, \quad \overset{pqrs}{{}^{10}D}, \quad \ldots \quad \overset{pqrst\ldots}{{}^{n}M}$$

sehr verständliche Zeichen. Der Zeiger ist hier nicht beygefügt worden; er bezieht sich immer auf die Coefficienten der Reihen p, q, r, s, ... die für bestimmte Fälle bestimmt angegeben werden.

115. Aufgabe. Es sind mehrere, nach Potenzen von x geordnete, von einander unabhängige, Reihen p, q, r, s, . . .

$$\begin{array}{l} \overset{1}{\mathfrak{A}} + \overset{2}{\mathfrak{B}}x + \overset{3}{\mathfrak{C}}x^2 + \overset{4}{\mathfrak{D}}x^3 + \text{etc.} = s \\ \mathfrak{a} + \mathfrak{b}x + \mathfrak{c}x^2 + \mathfrak{d}x^3 + \text{etc.} = r \\ a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.} = q \\ \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.} = p \\ \vdots \end{array}$$

mit dem überschriebenen, allen Coefficienten gemeinschaftlichen Zeiger 1, 2, 3, 4 . . . gegeben: man

s) Denn, wenn in einer Classe, z. B. der dritten, die Complexion $\mathfrak{a} b \gamma$ vorkommt, so müssen darinn auch die gleichnamigen (aus den ersten drey Buchstaben bestehenden) aber verwechselten $\mathfrak{a} c \beta$, $\mathfrak{b} a \gamma$, $\mathfrak{b} c \alpha$, $\mathfrak{c} a \beta$, $\mathfrak{c} b \alpha$, vorkommen, weil diese, nach dem gemeinschaftlichen Zeiger, sämtlich zu einer und derselben Summe gehören.

verlangt das allgemeine $(n+1)^{te}$ Glied der, gleichfalls nach Potenzen von x geordneten, Producte von zwey, drey, vier . . . m dieser Reihen von den vorhergehenden niedrigern Producten und Gliedern, wie man will, abhängig oder unabhängig, darzustellen.

116. Auflösung Diese geben die Variationsclassen nach der Reihe (114, 3). Es ist nämlich

$$(qp) \rceil (n+1) = {}^{n+2}\overset{qp}{B} x^n \quad \Big| \quad (srqp) \rceil (n+1) = {}^{n+4}\overset{srqp}{D} x^n$$

$$(rqp) \rceil (n+1) = {}^{n+3}\overset{rqp}{C} x^n \quad \Big| \quad (\ldots srqp) \rceil (n+1) = {}^{n+m}\overset{\ldots srqp}{M} x^n$$

(Der Zeiger ist hier wie in 115).

Die über die Classenzeichen $B, C, D, \ldots, M$ geschriebenen Reihenbuchstaben $p, q, r, s \ldots$ zeigen zugleich die Stellen der Complexionen an, in die man, bey Entwickelung der Classen, die Coefficienten dieser Reihen zu setzen hat; z. B. hier, die Coefficienten aus p in die letzte; die aus q in die vorletzte; die aus r in die vorvorletzte u. s. w. Stelle der zusammengehörigen Complexionen der Classen. Dadurch wird die (in 114, I) empfohlene Ordnung beobachtet.

117. Beweis. Dafs für die $(n+1)^{ten}$ Glieder der Producte aus zwey, drey, vier, . . . m Reihen immer x^n kommen müsse, ist für sich klar. Nun fangen die Verbindungen der Coefficienten in Beziehung auf den Zeiger, bey zwey Reihen qp von ${}^2\overset{qp}{B} = a\alpha$, bey drey Reihen rqp von ${}^3\overset{rqp}{C} = \mathfrak{a} a \alpha$, bey vier Reihen $srqp$ von ${}^4\overset{srqp}{D} = \mathfrak{A}\mathfrak{a} a \alpha$, bey m Reihen $\ldots srqp$ von ${}^m\overset{\ldots srqp}{M} = \ldots \mathfrak{A}\mathfrak{a} a \alpha$, an, und gehen bey ihnen die Summenexponenten der Classen (wie die Potenzexponenten von x) nach der Ordnung der natürlichen Zahlen fort. Folglich gehören für die $(n+1)^{ten}$ Glieder der Producte der Reihen, die Variationsclassen mit ihren Summen-

exponenten und die Potenzen x^n, so zusammen, wie in (116) ist angegeben worden.

118. Setzt man in die allgemeinen $(n+1)^{\text{ten}}$ Glieder, nach und nach $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ so findet man dieser Producte einzelne Glieder nach der Ordnung, nämlich

$$qp = {}^{2}\overset{qp}{B} + {}^{3}\overset{qp}{B}x + {}^{4}\overset{qp}{B}x^2 + {}^{5}\overset{qp}{B}x^3 + \text{etc.}$$

$$rqp = {}^{3}\overset{rqp}{C} + {}^{4}\overset{rqp}{C}x + {}^{5}\overset{rqp}{C}x^2 + {}^{6}\overset{rqp}{C}x^3 + \text{etc.}$$

$$srqp = {}^{4}\overset{srqp}{D} + {}^{5}\overset{srqp}{D}x + {}^{6}\overset{srqp}{D}x^2 + {}^{7}\overset{srqp}{D}x^3 + \text{etc.}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\ldots srqp = {}^{m}\overset{\ldots srqp}{M} + {}^{m+1}\overset{\ldots srqp}{M}x + {}^{m+2}\overset{\ldots srqp}{M}x^2 + {}^{m+3}\overset{\ldots srqp}{M}x^3 + \text{etc.}$$

Hier gehen $m, m+1, m+2, \ldots$ die Summenexponenten der Classen, und $0, 1, 2 \ldots$ die Potenzexponenten von x, nach der Ordnung der natürlichen Zahlen fort (117).

119. Noch mufs gezeigt werden, wie die Complexionen oder die einzelnen Glieder der Classen (116, 118) aus den Coefficienten der Reihen p, q, r, s zu den vorgeschriebenen Summen sich zusammen setzen lassen. Nachdem die Darstellung der Glieder einer verlangten Classe, auf andere vorhergegangene Beziehung hat oder nicht, nachdem wird auch die Aufgabe (115) abhängig oder unabhängig gelöset werden.

Zuförderst will ich eine so genannte independente ζ) Auflösung aufstellen, wodurch man jede verlangte Classe (jedes verlangte Glied eines Products der Reihen) ausser der Ordnung finden kann, ohne von den vorhergehenden Classen oder Gliedern etwas zu kennen, oder zu gebrauchen. Daraus werden sich, gleichsam von

ζ) Wegen solcher independenten Auflösungen vergleiche man Erst. Anh. 7 und die dortige Anmerkung.

selbst, mehrere Dependenzen, folglich auch abhängige Auflösungen, ergeben.

120. Aufgabe. Die Complexionen einer beliebigen, auf die Reihen $p, q, r, s, \ldots$ (115) und den dortigen Zeiger bezogenen, Variationsclasse, z. B. $^6\overset{srqp}{D}$, ausser der Ordnung, und von vorhergehenden unabhängig, zu finden.

Auflösung. Die erste gut geordnete Complexion der vorgegebenen vierten Classe zur Summe 6 ist offenbar, in Zahlen 1 1 1 3, in Buchstaben 𝔄 𝔞 $a\gamma$. Aus dieser Anfangscomplexion fliefsen alle übrigen, wie folget:

s	r	q	p
𝔄	𝔞	a	γ
𝔄	𝔞	b	β
𝔄	𝔞	c	α
𝔄	𝔟	a	β
𝔄	𝔟	b	α
𝔄	𝔠	a	α
𝔅	𝔞	a	β
𝔅	𝔞	b	α
𝔅	𝔟	a	α
ℭ	𝔞	a	α

I. Das höchste der gegebenen Elemente, hier γ, aus der Reihe p, setze man als einzelnes Ding im Winkel.

II. Diesem höchsten Elemente γ setze man den ersten Coefficienten a aus q vor; dann vertausche man das so eben vorgesetzte Element mit dem nächst höhern, und das daneben stehende zweyte mit dem nächst niedrigern, und fahre so fort, bis das letzte Element α wird, so erhält man die Binionen $a\gamma$, $b\beta$, $c\alpha$, im zweyten Winkel.

III. Den einzelnen Binionen in II setze man den ersten Coefficienten 𝔞 aus r vor. Das giebt die Ordnung 𝔞 der Ternionen; und daraus findet man weiter, durch Vertauschung des vorgesetzten Elements mit dem nächst höhern, und des letzten mit dem nächst niedrigern (mit Übergehung der Complexionen, die sich auf α endigen) die Ordnung 𝔟, und daraus auf eben die Art die Ordnung 𝔠, und so alle Ternionen 𝔞$a\gamma$, u. s. w. bis mit 𝔠$a\alpha$, im dritten Winkel.

IV. Eben so (durch Vorsetzung des ersten Coefficienten $\mathfrak{A}$ aus s, vor alle Ternionen, und durch gehörige Umtauschung der vorgeschriebenen und der letzten Buchstaben, nach III) geht man zu den Quaternionen und ihren Ordnungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, für die verlangte Classe fort; und so auch zu Verbindungen von mehr als vier Buchstaben, für höhere Classen, wenn dergleichen gefordert werden,

Beweis. Diese Auflösung ist keine andere, als die vorlängst bekannte Regel zu Auffindung der Variationscomplexionen zu bestimmten Summen, nur auf mehrere Reihen p, q, r, s . . . angewendet, (Samml. I. S. 187; 49. vergl. S. 171; 24 und S. 186; 47). Man verfährt nämlich so, als ob nur eine Reihe gegeben wäre, setzt aber für die Buchstaben dieser einen Reihe, nach und nach die gleichnamigen Buchstaben der verschiedenen Reihen in die ihnen zugehörigen Stellen (116). Ein hierher gehöriges Beyspiel für eine Reihe, aber in Zahlen o, 1, 2 ist schon (97) da gewesen.

121. Die Winkel, wie hier geschehen, zu ziehen, ist eben nicht nothwendig; wohl aber bequem, und wegen Nachweisung der Involutionen nützlich. Nämlich: aus der Union γ im ersten Winkel, deriviren die Binionen im zweyten; daraus die Ternionen im dritten Winkel; und daraus zuletzt die Quaternionen der verlangten Variationsclasse. Vergleicht man die hier (120) gefundenen Complexionen mit dem Werthe von C bey Arbogast (109), so findet man bey beyden die Ordnung verschieden. Lieset man aber meine Complexionen vorwärts, von der ersten bis zur letzten herunter, die Arbogastischen rückwärts, von der letzten bis zur ersten herauf, so zeigt sich dabey die merkwürdige Erscheinung, daſs beyde Darstellungen, die meinige von oben herunter, die Arbogastische von unten herauf, involutorisch sind. Das wird

aus folgenden beyden Beyspielen, durch unmittelbare Nebeneinanderstellung der Complexionen, und Ziehung der Involutionswinkel noch deutlicher erhellen.

122. Aufgabe. Den vierten Coefficienten des Products s, r, q, p, oder $\overset{srqp}{{}^7D}$ involutorisch darzustellen.

Auflösung. Die erste gut geordnete Complexion der verlangten Classe und Summe ist $\mathfrak{A}\,a\,a\,\delta$. Hier kommt also δ an die Stelle von γ in (120, I); und wenn man das dort weiter angewiesene Verfahren (II, III, IV) hierauf anwendet, so erhält man meine Involution C, wie solche der Arbogastischen A gegenüber (im zweyten Anhange, Tafel IV) involutorisch entwickelt ist. Zwischen beyden liegt die Zahleninvolution B, zu beliebiger Vergleichung mit meiner Buchstabeninvolution C. Ich habe dazu die Tafel IV des zweyten Anhangs gewählt, weil sich dort alles bequemer neben einander stellen und mit einander vergleichen läfst. Die Erscheinung wegen der beyderley Involutionen nach entgegen gesetzter Richtung (121), wie auch die gezogenen Winkel nachweisen, ist dort unter den beyden Anordnungen A C bemerkt.

123. Setzt man bey Entwickelung der Complexionen anstatt sie, wie bey C, unter einander zu schreiben, selbige in die figürliche Anordnung D, (a. a. O.) neben und unter einander, wie ich bereits im *Nov. Syst. Permutt.* p. LXXV gethan habe: so ist diese Darstellung, beydes, nach Anfangs- und Endbuchstaben geordnet, und mehrere, gemeinschaftliche Factoren, Zerlegungen und Dependenzen fallen dabey von selbst in die Augen. So übersieht man z. B. sogleich:

I. Dafs

$$\overset{srqp}{{}^7D} = \overset{srq}{{}^3C}.\delta + \overset{srq}{{}^4C}.\gamma + \overset{srq}{{}^5C}.\beta + \overset{srq}{{}^6C}.\alpha$$

Ein Satz, der sich sogleich und ohne Schwierigkeit, für jede Classe und jede Summe allgemein ausdrücken läfst; wobey man mit Nutzen meine Distanzexponenten anwenden, und $\beta = \overset{1}{\alpha}$, $\gamma = \overset{2}{\alpha}$, $\delta = \overset{3}{\alpha}$, etc. setzen kann. Wollte man ferner,

II. Das Product $srqp$, wie es hier in I durch $srq.p$ ausgedrückt ist, durch $sr.qp$ ausdrücken, so könnte das so geschehen, wie es (a.a.O.) unter der figürlichen Anordnung D angegeben worden. Es ist nämlich in combinatorischen Zeichen,

$$\overset{srqp}{{}^{7}D} = \overset{sr}{{}^{2}B}.\overset{qp}{{}^{5}B} + \overset{sr}{{}^{3}B}.\overset{qp}{{}^{4}B} + \overset{sr}{{}^{4}B}.\overset{qp}{{}^{3}B} + \overset{sr}{{}^{5}B}.\overset{qp}{{}^{2}B}$$

Diese Formel gibt den Werth von D bey ARBOGAST (110).

124. Aufgabe. Den fünften Coefficienten des Products $srqp$, oder $\overset{srqp}{{}^{8}D}$, involutorisch darzustellen.

Auflösung. Die erste, gut geordnete Complexion der verlangten Classe und Summe ist 𝔄aaε. Hier steht also ε an der Stelle von γ (in 120, I), und wenn man das dort weiter angewiesene Verfahren (II, III, IV) hierauf anwendet, so erhält man (Zw. Anh. Taf. IV) meine Involution G, der Arbogastischen E gegenüber. Zwischen beyden liegt die Involution F, wie sie nur für eine Reihe p kommen würde, zu beliebiger Vergleichung mit meinem G für mehrere Reihen p, q, r, s. Die figürliche Anordnung H ist wie im *Nov. Syst. Perm.* p. LXXV, C. Was übrigens (in 123, I, II) bemerkt worden ist, findet auch hier seine Anwendung. Die derivative Aufsuchung dieses Gliedes hat ARBOGAST (112) als ein Beyspiel eines independenten Verfahrens aufgestellt. Nach der Zerfällung in (123, I) ist

$$\overset{srqp}{{}^{8}D} = \overset{srq}{{}^{3}C}.\varepsilon + \overset{srq}{{}^{4}C}.\delta + \overset{srq}{{}^{5}C}.\gamma + \overset{srq}{{}^{6}C}.\beta + \overset{srq}{{}^{7}C}.\alpha$$

Ich habe die Aufgaben (120, 122, 124) mit Fleifs gewählt und auf einander folgen lassen, um den invo-

lutorischen Gang daran zu erläutern, weil Classen mit steigenden Summenexponenten am besten dazu geeignet sind.

Hier noch einige Vergleichung der derivativen und combinatorischen in diesem Abschnitte vorkommenden Zeichen.

125. Es ist

$$a = \mathrm{D}^0.\, a = \overset{0}{a} \qquad\Big|\qquad d = \frac{\mathrm{D}^3.\, a}{1.2.3} = \overset{3}{a}$$

$$b = \mathrm{D}.\, a = \overset{1}{a} \qquad\Big|\qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$c = \frac{\mathrm{D}^2.\, a}{1.2} = \overset{2}{a} \qquad\Big|\qquad \overset{n}{a} = \frac{\mathrm{D}^n.\, a}{1.2.3..n} = \overset{n}{a}$$

Die kleinen Zahlen über a sind meine Distanzexponenten, und $\overset{n}{a} = \frac{\mathrm{D}^n.\, a}{1.2.3..n}$ bedeutet also den $(n+1)^{\text{ten}}$ Buchstaben, vom Anfange an, a als den **ersten** gezahlt.

126. Für **zwey** Reihen qp (115) ist

$$(a\alpha) = (qp)\varkappa 1 = {}^{2}\overset{qp}{B} = a\alpha$$

$$\mathrm{D}.(a\alpha) = (qp)\varkappa 2 = {}^{3}\overset{qp}{B} = a\beta + b\alpha$$

$$\frac{\mathrm{D}^2.(a\alpha)}{1.2} = (qp)\varkappa 3 = {}^{4}\overset{qp}{B} = a\gamma + b\beta + c\alpha$$

$$\frac{\mathrm{D}^3.(a\alpha)}{1.2.3} = (qp)\varkappa 4 = {}^{5}\overset{qp}{B} = a\delta + b\gamma + c\beta + d\alpha$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{\mathrm{D}^n.(a\alpha)}{1.2.3..n} = (qp)\varkappa(n+1) = {}^{n+2}\overset{qp}{B}$$

$$= \overset{0\;n}{a\alpha} + \overset{1\;n-1}{a\alpha} + \overset{2\;n-2}{a\alpha} + \text{etc.} + \overset{n-1\;1}{a\alpha} + \overset{n\;0}{a\alpha}$$

127. Für **drey** Reihen rqp (115) ist

$$(\mathfrak{a}\, a.\alpha) = (rqp)\varkappa 1 = {}^{3}\overset{rqp}{C} = {}^{2}\overset{rq}{B}\alpha$$

$$\mathrm{D}.\ (\mathfrak{a}\, a.\alpha) = (rqp)\varkappa 2 = {}^{4}\overset{rqp}{C} = {}^{2}\overset{rq}{B}\beta + {}^{3}\overset{rq}{B}\alpha$$

$$\frac{\mathrm{D}^{2}.(\mathfrak{a}\, a.\alpha)}{1.2} = (rqp)\varkappa 3 = {}^{5}\overset{rqp}{C} = {}^{2}\overset{rq}{B}\gamma + {}^{3}\overset{rq}{B}\beta + {}^{4}\overset{rq}{B}\alpha$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\mathrm{D}^{n}.(\mathfrak{a}\, a.\alpha)}{1.2..n} = (rqp)\varkappa(n+1) = {}^{n+3}\overset{rqp}{C}$$

$$= {}^{2}\overset{rq}{B}\,\overset{n}{\alpha} + {}^{3}\overset{rq}{B}\,\overset{n-1}{\alpha} + {}^{4}\overset{rq}{B}\,\overset{n-2}{\alpha} + \text{etc.}\ {}^{n+2}\overset{rq}{B}\,\overset{0}{\alpha}$$

128. Für **vier** Reihen $srqp$ (115) ist

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\, a.\alpha) = (srqp)\varkappa 1 = {}^{4}\overset{srqp}{D} = {}^{3}\overset{srq}{C}\alpha$$

$$\mathrm{D}.\ (\mathfrak{A}\mathfrak{a}\, a.\alpha) = (srqp)\varkappa 2 = {}^{5}\overset{srqp}{D} = {}^{3}\overset{srq}{C}\beta + {}^{4}\overset{srq}{C}\alpha$$

$$\frac{\mathrm{D}^{2}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\, a.\alpha)}{1.2} = (srqp)\varkappa 3 = {}^{6}\overset{srqp}{D} = {}^{3}\overset{srq}{C}\gamma + {}^{4}\overset{srq}{C}\beta + {}^{5}\overset{srq}{C}\alpha$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\mathrm{D}^{n}.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}\, a.\alpha)}{1.2..n} = (srqp)\varkappa(n+1) = {}^{n+4}\overset{srqp}{D}$$

$$= {}^{3}\overset{srq}{C}\,\overset{n}{\alpha} + {}^{4}\overset{srq}{C}\,\overset{n-1}{\alpha} + {}^{5}\overset{srq}{C}\,\overset{n-2}{a} + \text{etc.} + {}^{n+3}\overset{srq}{C}\,\overset{0}{\alpha}$$

und so auch bey **mehr als vier** Reihen, für die das Fortgangsgesetz ohne Schwierigkeit in die Augen fällt. Es läſst sich alles schon aus dem ganz einfachen Gesetze in (126) ableiten, wenn man die α, β, γ, δ ... beybehält, wie sie dort stehen, und statt der a, b, c, d ... die Classen, $\overset{rq}{B}$ bey drey Reihen rqp, und $\overset{srq}{C}$ bey vier Reihen $srqp$, und so weiter bey mehreren Reihen, jedesmal von der niedrigsten Summe an, substituirt.

Auch ist, alles durch zweyte Classen ausgedrückt,

$$\frac{\mathrm{D}^n.(\mathfrak{A}a, ax)}{1.2..n} = (srqp) \, x \, (n+1)$$

$$=$$

$$\overset{sr}{{}^2B}.\overset{qp}{{}^{n+2}B} + \overset{sr}{{}^3B}.\overset{qp}{{}^{n+1}B} + \overset{sr}{{}^4B}.\overset{qp}{{}^nB} + \text{etc.} + \overset{sr}{{}^{n+2}B}.\overset{qp}{{}^2B}$$

129. In (120) folgen
aus der Union $\gamma = {}^3A$, im ersten Winkel;
die Binionen ${}^4B$, im zweyten Winkel; daraus
die Ternionen ${}^5C$, im dritten Winkel; daraus
die Quaternionen ${}^6D$, im vierten Winkel; u. s. w.

wo der Summenexponent für jede zunächst folgende Variationsclasse um 1 höher ist; gerade so, wie bey den Combinationsclassen (Erst. Anh. 11, und die dortigen Bemerkungen in 12)

$$\left|\overset{qp}{{}^5B}\right. = \overset{qp}{{}^5B}$$

$$\left|\begin{matrix} \mathfrak{a}\,\overset{r\;qp}{{}^5B} \\ \mathfrak{b}\;{}^4B \\ \mathfrak{c}\;{}^3B \\ \mathfrak{d}\;{}^2B \end{matrix}\right. = \overset{rqp}{{}^6C}$$

$$\left|\begin{matrix} \mathfrak{A}\,\overset{s\;rqp}{{}^6C} \\ \mathfrak{B}\;{}^5C \\ \mathfrak{C}\;{}^4C \\ \mathfrak{D}\;{}^3C \end{matrix}\right. = \overset{srqp}{{}^7D}$$

u. s. w. f.

130. In der Anordnung (120, und im zweyt. Anhang Taf. I, C, F) werden Summen einzelner Complexionen, wie sie in den dortigen Winkeln stehen, involvirt. An ihrer Stelle involvire man nun die zugehörigen Variationsclassen selbst mit ihren Zeichen, von der zweyten B an (eigentlich kann man die Involution anfangen, von welcher Classe man will) so kommt die involutorische Darstellung, wie sie hier zur Seite steht; in welcher ich die Winkel mit ihren Füllungen, zu mehrerer Deutlichkeit, etwas von einander abgerückt habe. Auch stehen die Reihenbuch-

staben hier nur über den ersten Gliedern, zugleich als Nachweisung für die übrigen. Hier ist also

$$\overset{rqp}{{}^6C} = \mathfrak{a}\,\overset{qp}{{}^5B} + \mathfrak{b}\,\overset{qp}{{}^4B} + \mathfrak{c}\,\overset{qp}{{}^3B} + \mathfrak{d}\,\overset{qp}{{}^2B}$$

$$\overset{srqp}{{}^7D} = \mathfrak{A}\,\overset{rqp}{{}^6C} + \mathfrak{B}\,\overset{rqp}{{}^5C} + \mathfrak{C}\,\overset{rqp}{{}^4C} + \mathfrak{D}\,\overset{rqp}{{}^3C}$$

der Form nach mit (127, 128) vollkommen übereinstimmend. Hier sind nämlich die Anfangsbuchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$; dort die Endbuchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit den Classen verbunden, angegeben, welches zu denselben Complexionen führt, weil $r.qp = rq.p = rqp$, und eben so $s.rqp = srq.p = srqp$.

131. Diese Involution der Classen führt also gerade zu auf zerlegende Formeln, wie in (120, I; 126–128) vorkommen. Eben so kann man auch Producte von Classen involviren, und dadurch Ausdrücke von Producten der Classen aller Art erhalten, wie in (123, II; 128) nur von der zweyten Classe vorkommen. Ich will mich aber dabey nicht aufhalten, und nur noch des *Methodi Productorum*, wie ich ihn nenne, eines Verfahrens, dem ähnlich, was der *Methodus Potentiarum* zeigt, Erwähnung thun, wovon die Formel im *Nov. System. Perm. p.* LXXVI, E, 9 steht.

ACHTER ABSCHNITT.

Die combinatorische Evolution der Polynomialgröſsen ist analytisch, auch sind die combinatorischen Involutionen und Deductionen wahre Derivationen, und zugleich die leichtesten ihrer Art.

132. Daſs die Polynomialgröſsen mit unübertrefflicher Leichtigkeit combinatorisch sich darstellen lassen, ist nach dem, was im Vorhergehenden darüber beyge-

bracht worden ist, nicht dem geringsten Zweifel unterworfen. Sind aber diese Darstellungen auch analytisch? Diese Frage hat bereits der Conferenzrath Tetens verneint (Sml. I. S. 2, 3), in so fern er die combinatorischen Operationen in der Analysis für fremd ansieht, giebt aber doch zu, man könne sie eben sowohl unter die analytischen Methoden aufnehmen, als das Differentiiren und Integriren. Was Prof. Pfaff auf jene Äusserung „die combinatorischen Operationen seyen der Analysis fremd" erwiedert hat, darüber kann man im Archiv der Mathematik (Heft VII, S. 348) nachsehen. Auch Prof Arbogast erklärt das bey Entwickelung und Darstellung der Polynomialgröfsen angebrachte combinatorische Verfahren für *moins analytique.* Die Gründe, die ihn zu diesem Ausspruch bewogen haben, stehen nicht an der Stelle, wo er ihn ausdrücklich äussert [no 52] sondern in der Vorrede seines Werks [Seite v], wo die derivativen Verfahren mit den combinatorischen verglichen, und die ersten den letztern vorgezogen werden. Sie beruhen auf folgendem:

1) Der Derivationscalcul giebt die Glieder der Polynomialgröfsen durch eine zusammenhängende Rechnung, Buchstabenproducte und ihre numerischen Coefficienten, beyde zusammen auf einmal. In der combinatorischen Analysis hingegen werden diese Gröfsen stückweise gefunden, zuerst die Litteralproducte, dann die zugehörigen numerischen Coefficienten (die Versetzungszahlen).

2) Der Derivationscalcul bedarf keiner zum voraus berechneten Combinationstafeln, noch anderer, gewissermafsen mechanischen, Hülfsmittel durch Vertheilung in Fächer, um dadurch die Gruppen der Polynomialgröfsen zu formiren.

3) Die Derivationsrechnung leitet durch einen zusammenhängenden Calcul eine Polynomialgröfse aus der andern her, und stellt sie ganz reducirt auf; alles

mit solcher Leichtigkeit, dafs dabey nichts weiter als die Mühe des Schreibens in Anschlag kommt.

133. Darauf ift zu erwiedern:

1) Was den ersten Punct anbetrifft, so mufs ich mich vorläufig auf die ausführliche Erklärung berufen, die ich (Sml. II. S. 62, 63 Note k, und in den darinn citirten Stellen) gegeben habe. Ich halte, mit mehrern Analysten, noch immer dafür, es sey einfacher und leichter, zuerst die Literalproducte darzustellen, und ihnen nachher die numerischen Coefficienten beyzufügen. Die Aufstellung beyder zusammen, durch eine und diefelbe Regel, theilt schon die Aufmerksamkeit und macht das Gesetz dafür etwas verwickelter, weil Literalproducte und ihre Versetzungszahlen ganz verschiedene Elemente sind; die einen auf die Gestalt der Complexionen, die andern auf ihre Menge, Beziehung haben. Es scheint demnach besser zu seyn, wenigstens ist es bequemer, diese Elemente von einander abgesondert, als mit einander vereinigt, in Betrachtung zu ziehen. Dafs aber die reincombinatorischen Operationen und Involutionen, durch welche die Polynomialgröfsen dargeftellt werden, wirklich analytisch sind, kann nicht in Zweifel gezogen werden, weil sonst mehrere Arbogastische *Règles* [z. B. no. 30, 36, 43, 47] die mit meinen combinatorischen Vorschriften genau übereinstimmen, auch nicht analytisch seyn würden, da sie doch Resultate zusammenhängender, ganz unbestritten analytischer Arbeiten sind.

2) Was die zweyte Aeusserung anbetrifft, so beruht selbige auf der Voraussetzung, als ob die combinatorische Analysis solcher zum voraus berechneter Combinationstafeln und Vertheilung der Gröfsen in Fächer unumgänglich nöthig habe, und sie nicht ent-

behren könne. Keineswegès. Sie entwickelt die Formeln und die darinn enthaltenen combinatorischen Ausdrücke sogleich an Ort und Stelle, wo sie gebraucht werden, ohne alle Beyhülfe von Tafeln und andern mechanischen Hülfsmitteln. Wenn Combinationstafeln aufgestellt werden, so geschieht es blos der Bequemlichkeit wegen, auch noch die an sich leichten Regeln der Darstellung entbehrlich zu machen, die man sonst befolgen müfste. Ueberdies dienen sie zur Vergleichung und Verificirung des Gefundenen, weil es doch möglich ist, bey der Anwendung noch so leichter Verfahren sich zu versehen. Die hin und wieder aufgestellte Vertheilung der Gröfsen in Fächer, ist eben so an sich entbehrlich, als es die vorher-berechneten Combinationstafeln sind; die Resultate, die man braucht, hängen keineswegès davon ab. Aber eine solche Vertheilung ist ein vortreffliches Mittel, den Zusammenhang des Ganzen durch eine anschauliche Darstellung der einzelnen Theile und ihrer Verbindung unter einander mit einem Blicke zu übersehen. Ein paar Beyspiele werden hier nicht überflüssig seyn.

In der ersten Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen wird (S. 202) eine Tafel der Combinationen zu unbestimmten Summen n, in lexikographischer Ordnung mitgetheilt, welche das Ableitungsgesetz folgender Glieder aus vorhergehenden deutlich vor Augen legt, und als eine im voraus berechnete Tafel, die zusammen gehörigen Complexionen, für jeden bestimmten Werth von n, sogleich darstellt. Gleichwohl ist eine solche Tafel gar keine nothwendige Bedingung der combinatorischen Entwickelung oder Zusammensetzung der Gröfsen, auf die sie sich bezieht; wie das Exempel (Ebend. S. 281) zeigt, für welches die dort verlangten Glieder, von

jener Tafel unabhängig, mit gröſster Leichtigkeit sich finden lassen.

Gleiche Bewandnis hat es mit der (Ebend. S. 204) in Fächer eingetheilten Tafel der Combinationen zu unbestimmten Summen *n*, nach gut geordneten Complexionen und Classen; dahin auch die beyden Tafeln (S. 208, α, β), gehören. Welche anschauliche Darstellung gewährt hier nicht diese Vertheilung der Gröſsen in Fächer! Man faſst das Ganze mit seinen Theilen mit einem Ueberblick. Bey solchen Vorzügen dürfte es wohl wenig auf sich haben, wenn eine solche Tafel eine nothwendige unentbehrliche Norm für die darinn begriffenen Fälle enthielte, so, daſs sich solche ohne diese Tafel nicht lösen lieſsen. Aber nein Es wird (Ebend. S. 210, 1) ausdrücklich erinnert „Obschon hier folgende Complexionen und „Fächer aus vorhergehenden abgeleitet werden, so „kann man gleichwohl einzelne Vertical- Horizontal- „und Diagonal-Reihen und Fächer, ganz independent „von einander, auſser der Ordnung, leicht schaffen. Das „giebt insonderheit die Tafel (S. 208, β) klar und „deutlich zu erkennen, weil man die Complexionen „jeder Classe und Summe unmittelbar darstellen „kann.“

Dies ist der Gesichtspunct, aus welchem man die Combinationstafeln und die Vertheilung der Gröſsen in Fächer zu betrachten hat. Beyde sind nützliche aber entbehrliche Hülfsmittel. Die Darstellung combinatorischer Gröſsen hängt von leichten Regeln ab, durch deren Anwendung und Befolgung jene Gröſsen erst in die Tafeln gekommen sind.

Daſs übrigens in der combinatorischen Analysis von der figürlichen Anordnung der Gröſsen

und ihrer Lage gegen einander häufig Gebrauch gemacht wird, um theils besondere theils allgemeine Sätze und Regeln daraus abzuleiten, ist aus unzähligen Beyspielen bekannt. Von einer *Arithmetica figurata*, einer *Analysi situs*, kommen überall nur Bruchstücke vor. Die Combinationslehre und ihre Anwendung auf die Analysis führt ganz ungezwungen darauf. Einige scharfsinnige hieher gehörige Bemerkungen Bürmann's in seinem *Appendice sur les Rapports de Situation* zu seinem obigen *Polynome Combinatoire* (S. 117). Was endlich

3) Den letzten Punct anbetrifft, so bleibt hier die combinatorische Analysis keinesweges hinter dem Derivationscalcul zurück. Auch sie leitet durch ein zusammenhängendes Verfahren die Polynomialgröſsen, eine aus der andern her, und stellt sie ganz reducirt auf; bekanntermaſsen mit der Leichtigkeit, daſs man dazu nicht mehr Zeit braucht, als man zum Schreiben nöthig hat.

Die Wahrheit dieser Behauptung erhellet schon aus einer flüchtigen Uebersicht des ersten Anhangs zu dieser Abhandlung, in welchem Classen aus Classen, zu einerley und verschiedenen, steigenden und fallenden, Summenexponenten abgeleitet werden, sämmtlich in arithmographischer Folge. Beyspiele der eben so einfachen lexicographischen Anordnung kommen auch im zweyten Anhange (Taf. IV) vor. Die so groſse Leichtigkeit der Verfahren hängt lediglich von den rein-combinatorischen Operationen und Involutionen ab, die hier gebraucht werden, und auf bloſsem Ansetzen oder Zufügen, Wegnehmen oder Absondern, Aus- oder Umtauschen (eine Substitution ohne alle Reduction) der vorgegebenen Elemente oder Gröſsen beruhen.

134. Aus dem ersten Anhange und der Tafel IV im zweyten, ergiebt sich ferner ohne Schwierigkeit, dafs die combinatorischen Darstellungen der Classen aus Classen wahre Derivationen sind, die sich auf einen gewissen Anfang (*Origine*) beziehen. So folgen z. B. (Erst. Anh, 7) aus dem Anfange $\eta = {}^6A$, die übrigen Classen zu derselben Summe ${}^6B$, ${}^6C$, ${}^6D$, ${}^6E$, ${}^6F$, eine nach der andern, durch ein zusammenhängendes Verfahren, und (Ebend. 10, 11) aus dem Anfange $\varkappa = {}^9A$ die folgenden Classen mit steigenden Summen ${}^{10}B$, ${}^{11}C$; imgleichen aus dem Anfange $\beta = {}^7A$, die Classen ${}^8B$, ${}^9C$, ${}^{10}D$. . . Man vergleiche (zweyt. Anh. Taf. II. no. I und II) die dortigen Beyspiele, sämmtlich in arithmographischer Folge. Ebendaselbst (no. IV) werden aus der Ordnung β^{n-1} alle übrigen β^{n-2}, β^{n-3}, β^{n-4}, u. s. w. nach einem gemeinschaftlichen Gesetze lexikographisch gefolgert. Die dortige No. V ist ein besonderer Fall, für $n = 7$.

135. Ich habe bereits oben (6) erinnert, dafs, wenn man meine Derivationen von den Arbogastischen durch einen besondern Namen unterscheiden will, man die meinigen combinatorische, die Arbogastischen analytische nennen könnte. Dafs gleichwohl die combinatorischen Derivationen auch analytisch sind, ist (133, 1) schon bemerkt worden. Sie haben aber auch noch andere Ansprüche auf diese Benennung, in so fern sie involutorisch sind, und mit den Classen zu irgend einer Summe (z. B. zur Summe 10) auch zugleich die Classen aller nächst niedrigern Summen 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 deutlich mit vorgelegt werden, und letztere aus den erstern sich sogleich evolviren und deriviren lassen. Eben so verhält es sich mit den successiven Werthen der Gröfsen (z. B. bey continuirlichen Brüchen) wo die frühern in die

spätern sich involviren, und wiederum aus den letztern die erstern sich evolviren lassen, mit einer solchen Klarheit und Leichtigkeit, die nur auf involutorischen Wegen möglich ist. Eine solche Übersicht der Grössen aus ihren Bestandtheilen verdient ohne Zweifel analytisch genannt zu werden. Wenn endlich, wie Prof. Klügel nur noch neuerlich bemerkt hat (Smml I. S. 49) die Analysis überhaupt die Formen der Grössen, nach ihrer Entwickelung und Umwandlung zum eigentlichen Gegenstande hat: so gehören gewiss die combinatorischen Operationen und Involutionen vornehmlich dahin, die sich ausschliesslich mit Auffindung der Gestalten und Formen, so wie mit ihrer Umwandlung (der arithmographischen in die lexicographische, der Moivrischen Form in die Boscovichsche) beschäftigt; u. s. w.

ERSTER ANHANG

COMBINATORISCHE ENTWICKELUNG UND DARSTELLUNG DER COMPLEXIONEN

FÜR EINZELNE COMBINATIONSCLASSEN UND MEHRERE ZUSAMMEN.

Ich habe zwar in der vorhergehenden Abhandlung als bekannt vorausgesetzt, wie die Gröſsen $^{n}A, {}^{n}B, {}^{n}C, {}^{n}D, \ldots$ oder $^{n}A, {}^{n+1}B, {}^{n+2}C, {}^{n+3}D, \ldots$ und andere dergleichen für gegebene Summenexponenten und Zeiger, combinatorisch sich entwickeln und darstellen lassen; eine Voraussetzung, zu welcher ich um so mehr berechtigt war, weil darüber bereits in meinen und Anderer [a]) Schriften häufige und ausführliche Anweisungen ertheilt worden sind. Indessen dürfte es doch, gewisser Leser wegen, die hier vielleicht eine nähere Belehrung wünschen und erwarten, vornehmlich aber zu unmittelbarer Vergleichung des oben berührten Arbogastischen derivativen Verfahrens [no. 23 — 49] mit meinem combinatorischen, insbesondere aber der derivativen, hier (70, 71, 73, 76, 78) aufgestellten Regeln mit den meinigen, nützlich seyn, im Buche selbst etwas davon

a) Töpfers, Rothens, Prassens, Pfaffs, Klügels, und neuerlich auch Stahls (Grundriſs der Combinationslehre) und Weingärtners (Lehrbuch der combinatorischen Analysis); worinn von combinatorischen Operationen und Involutionen ausführlich gehandelt worden ist.

nachgewiesen zu finden. Das kann auch um so eher geschehen, weil aus der grofsen Menge combinatorischer Entwickelungen und Darstellungen, hier nur ein sehr kleiner, aber wichtiger, Theil, zu Erfüllung jener Absicht schon hinreicht. Um den Faden der vorstehenden Abhandlung nicht zu unterbrechen, habe ich das dahin gehörige in diesen Anhang kurz zusammen gefafst. Zu besserer Übersicht mag Folgendes dienen.

1. Es seyen P, Q zwey nächste Combinationsclassen mit Wiederholungen; $n, n+1$ zwey nächste Summenexponenten dieser Classen, so geben für

$$\begin{matrix} {}^{n}P, & {}^{n+1}P \\ {}^{n}Q, & {}^{n+1}Q \end{matrix}$$

die horizontalen, verticalen und diagonalen Verbindungen zu zwey und zwey (vor- und rückwärts) dieser vier Classen, folgende Verschiedenheiten:

A. Einerley Classen zu verschiedenen Summen.

Aufg. Aus einer gegebenen Classe und Summe,

I. Dieselbe Classe zur nächsthöhern Summe

II. Dieselbe Classe zur nächstniedrigern Summe

herzuleiten.

$$\overbrace{{}^{n}P \qquad {}^{n+1}P}^{\text{I}}\!\!\overbrace{\qquad\qquad {}^{n}P}^{\text{II}}$$

B. Verschiedene Classen zu einerley Summe.

Aufg. Aus einer gegebenen Classe und Summe;

III. Die nächsthöhere Classe zu derselben Summe

IV. Die nächstniedrigere Classe zu derselben Summe

herzuleiten.

$$\overbrace{{}^{n}P \qquad {}^{n}Q}^{\text{III}}\!\!\overbrace{\qquad\qquad {}^{n}P}^{\text{IV}}$$

C. Verschiedene Classen zu verschiedenen Summen.

Aufg. Aus einer gegebenen Classe und Summe
V. Die nächsthöhere Classe zur nächsthöhern Summe
VI. Die nächstniedrigere Classe zur nächstniedrigern Summe

$$\overbrace{{}^{n}P \qquad {}^{n+1}Q}^{\text{V}}\overbrace{\qquad {}^{n}P}^{\text{VI}}$$

VII. Die nächsthöhere Classe zur nächstniedrigern Summe
VIII. Die nächstniedrigere Classe zur nächsthöhern Summe
herzuleiten.

$$\overbrace{{}^{n+1}P \qquad {}^{n}Q}^{\text{VII}}\overbrace{\qquad {}^{n+1}P}^{\text{VIII}}$$

Von den noch übrigen Combinationen ist: ${}^{n}Q$, ${}^{n+1}Q$, ${}^{n}Q$ mit I, II; und ${}^{n+1}P$, ${}^{n+1}Q$, ${}^{n+1}P$ mit III, IV gleichgültig. Diese gehören also nicht weiter hieher.

Diese Aufgaben, für bestimmte Classen und Summen, werden in der Folge, nach der Ordnung der hier beygefügten Zahlen I, II...VIII, aufgeführt werden. Zuförderst noch Folgendes, als nöthige Vorerinnerung:

2. Zu promter Anordnung und Darstellung der Complexionen jeder verlangten Combinationsclasse mit ihren Ordnungen, ist es wichtig, das Wenige, was hier folgt, immer in Gedanken und vor Augen zu haben.

a) Die Buchstaben α, β, γ, δ ... als Coefficienten der Reihe, werden auf Zahlenwerthe bezogen, wie sie der Zeiger $\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \\ 1, 2, 3, 4 \ldots\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots \\ 1, 2, 3, 4 \ldots\end{pmatrix}$ u. s. w. nachweiset.

b) Die Glieder oder Complexionen der Classen ${}^{n}A$, ${}^{n}B$, ${}^{n}C$, . . . gehören sämtlich zu einer und derselben Summe, n; das heiſst, in jeder einzelnen Complexion dieser Classen müssen die Zahlenwerthe der Elemente, nach dem Zeiger diese Summe ausmachen.

c) Die Classen z. B. ${}^{9}D$, ${}^{10}D$ bestehen aus so vielen Complexionen, so viel sich aus dem Zeiger Quaternionen (von Zahlen oder Buchstaben) mit Wiederholungen, gut geordnet (in alphabetischer oder numerischer Folge) zusammen setzen lassen, und die Summe 9 oder 10 ausmachen. Eben so für andere Classen und Summen.

d) Diese Complexionen müssen, nicht blos in Absicht auf die Elemente jeder einzelnen (*c*) sondern auch unter einander gut geordnet seyn, d. i. als Zahlen gelesen, wie wachsende Zahlen fortgehen, und auf einander folgen. Das nennt man gut geordnete Complexionen und Classen.

e) Die Complexionen der Classen lassen sich endlich combinatorisch

1) von andern vorhergehenden oder folgenden (frühern oder spätern) Classen und Summen abhängig herleiten; oder

2) von dergleichen Classen oder Summen unabhängig construiren; indem man dabey von einem gewissen Anfange (*Origine*) ausgeht, von welchem alle übrigen Complexionen, die man für eine oder mehrere Classen sucht, nach und nach abfliefsen.

Die combinatorischen, auf diese Sätze gegründeten, Vorschriften für die Auflösung der folgenden Aufgaben, sind äusserst leicht, und eben so leicht ist die Einsicht in ihre Gründe.

Einerley Classen zu verschiedenen Summen (1, A)

3. Aufgabe. ${}^{n}D$, ${}^{n+1}D$ wechselseitig von einander abzuleiten.

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \vartheta \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \ldots \end{pmatrix}$$

für $n = 9$, ist

I		II
${}^{9}D$	${}^{10}D$	${}^{9}D$
=	=	=
$\beta\beta\beta\eta$	$\beta\beta\beta\vartheta$	$\beta\beta\beta\eta$
$\beta\beta\gamma\zeta$	$\beta\beta\gamma\eta$	$\beta\beta\gamma\zeta$
$\beta\beta\delta\varepsilon$ - -	$\beta\beta\delta\zeta$	$\beta\beta\delta\varepsilon$
	$\beta\beta\varepsilon\varepsilon$ - -	- - - -
$\beta\gamma\gamma\varepsilon$	$\beta\gamma\gamma\zeta$	$\beta\gamma\gamma\varepsilon$
$\beta\gamma\delta\delta$ - -	$\beta\gamma\delta\varepsilon$	$\beta\gamma\delta\delta$
	$\beta\delta\delta\delta$ - -	- - - -
$\gamma\gamma\gamma\delta$ - -	$\gamma\gamma\gamma\varepsilon$	$\gamma\gamma\gamma\delta$
	$\gamma\gamma\delta\delta$ - -	- - - -

I Aus ${}^{9}D$ zu deriviren ${}^{10}D$

1) Den letzten Buchstaben jeder Complexion (in ${}^{9}D$) vertausche man mit dem nächstfolgenden des Alphabets oder Zeigers.

(Aus $\beta\beta\beta\eta$ folgt $\beta\beta\beta\vartheta$; aus $\beta\beta\gamma\zeta$ folgt $\beta\beta\gamma\eta$ u. s. w.)

2) In denjenigen Complexionen, in welchen dem letzten Buchstaben, oder einer Dignität desselben, der nächstvorhergehende Buchstabe des Alphabets oder eine Potenz von ihm vorangeht, vertausche man diesen Buchstaben oder einen Factor seiner Potenz, mit dem nächstfolgenden des Alphabets, und schreibe die so gefolgerte Complexion sogleich nach der, die (1) gegeben hat.

(Aus $\beta\beta\delta\varepsilon$ folgt $\beta\beta\delta\zeta$ (nach 1) und $\beta\beta\varepsilon\varepsilon$ (nach 2); aus $\beta\gamma\delta\delta$ folgt $\beta\gamma\delta\varepsilon$ (nach 1) und $\beta\delta\delta\delta$ (nach 2); aus $\gamma\gamma\gamma\delta$ folgt $\gamma\gamma\gamma\varepsilon$ (nach 1) und $\gamma\gamma\delta\delta$ (nach 2).

Hier waren nehmlich alle gut geordnete Complexionen (Quaternionen) zur verlangten Summe (hier 10), aus den gegebenen zur nächst niedrigern Summe, abzuleiten und in eine gut geordnete Classe zusammen zu stellen (2, *b*, *c*, *d*). So läſst sich die Richtigkeit der Auflösung (1, 2) geschwind übersehen und rechtfertigen.

Von einer Modification der Regel, und dadurch etwas veränderten Auflösung von I, sehe man (in 8).

Diese combinatorische Auflösung ist mit der derivativen (71) bis auf die numerischen Coefficienten, vollkommen übereinstimmend. Man vergleiche (72).

II, Aus ^{10}D zu deriviren ^{9}D

1) In jeder Complexion (in ^{10}D) worinn die beyden letzten Buchstaben verschieden sind, vertausche man den lezten Buchstaben mit dem nächstvorhergehenden des Zeigers oder Alphabets.

(Aus $\beta\beta\beta\vartheta$ folgt $\beta\beta\beta\eta$; aus $\beta\beta\gamma\eta$ folgt $\beta\beta\gamma\zeta$; u. s. w.)

2) Die übrigen Complexionen, die zwey oder mehrere gleiche Endbuchstaben enthalten, übergehe man.

(Dergleichen sind hier $\beta\beta\varepsilon\varepsilon$, $\beta\delta\delta\delta$, $\gamma\gamma\delta\delta$; diese würden nämlich (nach 1) lauter schlechtgeordnete Complexionen geben).

Auch diese Regel lieſse sich, wie die für I, nach (8) modificiren, und die Auflösung für II etwas dadurch abändern.

ARBOGAST's damit übereinstimmende derivative Regel, in (73)

4. Über das sehr nützliche Verfahren, allgemeine Vorschriften an besondern Beyspielen, wie hier (3, I, II), nachzuweisen, und was man dabey zu beobachten habe; MOIVRE's Bemerkung (*Infin. Dign.* p. 78. Note).

Jac. Bernoulli (*Ars conj. p.* 21) sagt von einer combinatorischen Anordnung, was von allen gilt: *Haec omnia melius exemplis, quam regulis addisci possunt;* nach Moivre hat man noch mehr; Regel und Beyspiel beysammen vereinigt. Begreiflich muſs das Exempel, als besonderer Fall, so gewählt seyn, daſs sich die einzelnen Theile der Regel deutlich darauf anpassen lassen. Ich werde daher auch in der Folge immer solche Beyspiele aufstellen.

Man übersieht leicht, daſs die Anordnung der Complexionen und ihre Folge jede andere seyn könnte, als hier (in 2) gefordert wird, wenn man sie nur alle hat. Aber die Bedingung von gut geordneten Complexionen und Classen (2, *c*, *d*) ist ein sehr sicheres und äusserst bequemes Mittel, keine Complexion zu verfehlen, keine doppelt zu erhalten. Ein anderes, nicht so bequemes Verfahren, die ${}^{m}M$, ${}^{m+1}M$, ${}^{m+2}M$. . . durch einander abzuleiten, und auf ${}^{5}E$, ${}^{6}E$, . . . ${}^{10}E$ angewendet (Pfaff *Disquis. anal. p.* 292). Dort sind zwar die Complexionen, nicht aber die Classen, gut geordnet.

Wie man die Complexionen aller Classen zur Summe n, aus denen zur Summe $n-1$ deriviren könne; von Weingaertner bequem angeordnet (Lehrb. der combin. Anal. I. 29. S. 130, 131). Das Verfahren läſst sich leicht umkehren, um von n auf $n-1$ zu deriviren.

Verschiedene Classen zu einerley Summe (1, *B*)

5. Aufgabe. ^nC, ^nD wechselseitig von einander abzuleiten.

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \ldots\ldots & \iota & \varkappa & \lambda\ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & 8 & 9 & 10\ldots \end{pmatrix}$$

Für $n = 12$, ist III IV

^{12}C		^{12}D		^{12}C
=		=		=
ββλ		βββκ		ββλ
βγκ		ββγι		βγκ
βδι		ββδθ		βδι
βεθ		ββεη		βεθ
βζη		ββζζ		βζη
γγι		βγγθ		γγι
γδθ		βγδη		γδθ
γεη		βγεζ	- -	[γεη
γζζ	- - -	- - - -		γζζ]
δδη		βδδζ		δδη
δεζ		βδεε	- -	[δεζ
εεε	- - -	- - - -		εεε]
		γγγη		
		γγδζ		
		γγεε		
		γδδε		
		δδδδ		

III. Aus ^{12}C zu deriviren ^{12}D

1) Jeder Complexion der gegebenen Classe (^{12}C), mit Übergehung derer, die am Ende zwey oder mehr gleiche Elemente haben, setze man β vor, und vertausche den letzten Buchstaben der Complexion mit dem nächstvorhergehenden des Zeigers. Dies giebt die

mit β anfangenden Complexionen (die Ordnung β) der zu derivirenden Classe (^{12}D).

(Die Puncte neben $\gamma\gamma\zeta$ und $\varepsilon\varepsilon\varepsilon$ in ^{12}C weisen nach, dass diese Glieder keine Complexionen in ^{12}D geben.)

2) In den so gefundenen Complexionen der Ordnung β (mit Übergehung derjenigen Complexionen, welche entweder zwey oder mehr gleiche Anfangs- oder zwey oder mehr gleiche Endelemente, eins oder beydes zusammen, haben) vertausche man den ersten Buchstaben jeder Complexion mit dem nächstfolgenden, den letzten hingegen mit dem nächstvorhergehenden, des Zeigers (nicht der Complexion). So erhält man die mit γ anfangenden Complexionen (die Ordnung γ) derselben Classe (^{12}D)

(Aus $\beta\gamma\gamma\vartheta$ folgt $\gamma\gamma\gamma\eta$; aus $\beta\gamma\delta\eta$ folgt $\gamma\gamma\delta\zeta$; aus $\beta\gamma\varepsilon\zeta$ folgt $\gamma\gamma\varepsilon\varepsilon$; aus $\beta\delta\delta\zeta$ folgt $\gamma\delta\delta\varepsilon$; Nur daraus lassen sich gut geordnete Complexionen folgern.)

3) Eben so derivirt man die Ordnung δ aus der Ordnung γ, wenn man die Vorschrift (2) auf die Ordnung γ, wie vorher auf β, anwendet, und eben so die zugehörigen Anfangs- und Endbuchstaben der umzuwandelnden Complexionen vertauscht Und so für die übrigen Ordnungen, so viel deren die zu derivirende Classe enthält, bis man (2) nicht weiter anwenden kann.

(Aus $\gamma\delta\delta\varepsilon$ folgt $\delta\delta\delta\delta$, die einzige Complexion der Ordnung δ und zugleich die letzte der Classe ^{12}D)

Anmerkung. Wenn man den Complexionen in ^{12}C, β vorsetzt (III, 1), und nachher (III, 2) β mit γ, und (III, 3) γ mit δ, u.s.w vertauscht, ohne weiter etwas zu ändern, so erhält man dadurch lauter zu ^{13}D (nicht zu ^{12}D) gehörige Complexionen; wo also jene erst auf diese, durch (3, II) oder [no. 36], zu reduciren wären. Durch das, was ich hier (in 1, 2) von Vertauschung des letzten Buchstabens jener Complexionen mit dem nächst vorhergehenden, gesagt habe, wird jene Nachweisung entbehrlich gemacht. Es ist bequem

in der Auflösung alles, was zu vollkommner Darstellung der Complexionen gehört, beysammen zu haben, wenn sich das so in der Kürze, wie hier und zunächst in (IV), abthun läſst; es ist aber auch nützlich, die Beziehung der Aufgaben und ihre Dependenzen von einander zu kennen. Und so begreift man ohne Schwierigkeit: 1) woher in dem Arbogastischen Vortrage der Regel (78, II, III, IV) die Berufung auf [no. 36] herrührt, die bey mir nicht vorkommt 2) wie und warum die dortigen (I, II) hier (in 1) sich haben zusammen ziehen lassen 3) daſs jene derivative Regel (78) mit meiner (Sml. I. S. 183. 184 zuerst vorgetragenen) hiesigen combinatorischen Vorschrift, ganz vollkommen übereinstimme und identisch sey; das abgerechnet, versteht sich, was in jener Regel die Bestimmung der numerischen Coefficienten anbetrift, die ich mit gutem Vorbedacht besonders betrachte.

IV. Aus ${}^{12}D$ zu deriviren ${}^{12}C$

1) Von allen Complexionen der (ersten) Ordnung β der gegebenen Classe (${}^{12}D$) schneide man das vorderste β durch einen Senkstrich, oder auf andere Art, ab, und vertausche den letzten Buchstaben der so gekürzten Complexionen mit dem nächstfolgenden des Zeigers.

(Aus $\beta\beta\beta\kappa$ folgt $\beta\beta\lambda$; aus $\beta\beta\zeta\zeta$ folgt $\beta\zeta\eta$; u. s. w.)

2) In denjenigen Complexionen, in welchen der letzte Buchstabe (einzeln oder wiederholt) den nächstvorhergehenden des Zeigers (einzeln oder wiederholt) zum Vorgänger hat, wird auch dieser vorletzte Buchstabe in den nächstfolgenden des Zeigers verwandelt, und die so veränderte Complexion gleich nach der gesetzt, die (1) gegeben hat.

(Aus $\beta\gamma\varepsilon\zeta$ folgt $\gamma\varepsilon\eta$ (aus 1) und $\gamma\zeta\zeta$ (aus 2)
aus $\beta\delta\varepsilon\varepsilon$ folgt $\delta\varepsilon\zeta$ (aus 1) und $\varepsilon\varepsilon\varepsilon$ (aus 2)
wie auch die Puncte in beyden Fällen nachweisen.)

Anmerkung. Das Abschneiden der β in (1) giebt lauter zu ¹¹C (nicht zu ¹²D) gehörige Complexionen. Daher eben die Vertauschung der lezten (1) zuweilen auch der vorlezten (2) Buchstaben der so gekürzten Complexionen mit dem nächstfolgenden, in der Regel selbst bemerkt; wogegen ARBOGAST (76) den Satz [no. 3.] hier (71) citirt. Und so ist wieder die derivative Regel (76) mit der hier gegebenen combinatorischen Vorschrift vollkommen übereinstimmend und identisch.

6. Da auf der Deduction der Ordnungen aus einander bey der rein-combinatorischen Darstellung so viel, ja fast alles, beruht, so will ich noch folgende

Ordnungen von ¹⁵C

ββξ				
βγν	γγμ			
βδμ	γδλ	δδκ		
βελ	γεκ	δει	εεθ	
βζκ	γζι	δζθ	εζη	ζζζ
βηι	γηθ	δηη		
βθθ				

wie sie aus einander sich deriviren lassen, neben einander stellen und als Beyspiel hier vorlegen. In (5, III, 1) würde die Ordnung β (für ¹²D) erst gesucht, und daraus die übrigen (Ebend. 2, 3) abgeleitet. Wäre, wie zuweilen geschieht und man auch hier (in ¹⁵C) annehmen kann, die Ordnung β, oder jede andere, gegeben, so könnte man die übrigen gleich nach (7, 3) bestimmen. Die Complexionen in den verticalen Colonnen liegen hier, zur unmittelbaren Vergleichung, so neben einander, wie eine aus der andern in horizontaler Richtung sich folgern läſst.

7. Von den Classen

ⁿA, ⁿB, ⁿC, ⁿD, ⁿE ... ⁿN

(für obigen Zeiger)

sind die beyden äufsersten, für jeden Werth von n, gegeben. Für $n = 6$ wäre ${}^6A = \eta$ und ${}^6F = \beta\beta\beta\beta\beta\beta = \beta^6$; und so könnte man η oder β^6 als Anfang der combinatorischen Deductionen (*Origine des Dérivations*) und als erste Classe annehmen, und daraus die zweyte, und daraus weiter die dritte, und so ferner die übrigen Classen mit ihren Ordnungen, zu derselben Summe, von allen Classen vorhergehender oder folgender Summen unabhängig, deriviren.

Folgende beyden Schemata bedürfen keiner weitern Erläuterung.

^{6}A	η		^{6}F	$\beta\beta\beta\beta\beta\beta$
	$\beta\zeta$		^{6}E	$\beta\beta\beta\beta\gamma$
^{6}B	$\gamma\varepsilon$		^{6}D	$\beta\beta\beta\delta$
	$\delta\delta$			$\beta\beta\gamma\gamma$
	$\beta\beta\varepsilon$			$\beta\beta\varepsilon$
^{6}C	$\beta\gamma\delta$		^{6}C	$\beta\gamma\delta$
	$\gamma\gamma\gamma$			$\gamma\gamma\gamma$
^{6}D	$\beta\beta\beta\delta$			$\beta\zeta$
	$\beta\beta\gamma\gamma$		^{6}B	$\gamma\varepsilon$
^{6}E	$\beta\beta\beta\beta\gamma$			$\delta\delta$
^{6}F	$\beta\beta\beta\beta\beta\beta$		^{6}A	η

Hier ist jede Derivation die umgekehrte der andern (directen). Für beyde sind die Anfangsglieder (*Origines*) η und $\beta\beta\beta\beta\beta\beta$ gegeben. Alles wird aus (5, III) im ersten, aus (5, IV) im zweyten Falle abgeleitet.

Anmerkung. Solche combinatorische Darstellungen der Complexionen nach einander, nennt man independente, weil die Entwickelung ihrer Classen keine Classen zu niedrigern oder höhern Summen voraus-

setzt. Freylich ist an eine absolute Independenz hier nicht zu gedenken. Die Dependenz ruht hier auf den Ordnungen der Classen, und man sieht hier, und weiſs schon sonst aus Erfahrung, daſs das, was man dafür zu merken und zu thun hat, an Leichtigkeit alles übertrifft, was man sich Leichtes denken mag; und so wird denn eine solche combinatorische Dependenz einer absoluten Independenz beynahe gleichgültig.

8. Da die Ableitung der Ordnungen aus Ordnungen ein so leichtes Geschäft ist, daſs man sich schwerlich dabey versehen kann: so wird es immer vortheilhaft seyn, die combinatorischen Aufgaben ganz oder zum Theil darauf zu reduciren. So z. B. wenn man ^{15}C aus ^{14}C oder ^{16}C deriviren sollte: so würde man immer leichter und geschwinder (wenigstens im ersten Falle) zum Zweck gelangen, wenn man die Regeln dafür (3, I und 3, II) nur auf die Darstellung der Ordnung β anwendete, und von da an die übrigen Ordnungen (von ^{15}C) von einander derivirte, wie in (6), als wenn man jene Regeln bis zu Ende verfolgen wollte. So läuft auch die Auflösung (5. III) auf ein bloſses Bestimmen der Ordnung β (Das. 1) und Deriviren der übrigen Ordnungen durch einander (Das. 2, 3) hinaus. Auch die Regel (5, IV) läſst sich darauf bringen, wenn man sie bloſs benutzt, die Ordnung β daraus herzustellen, und dann weiter Ordnungen aus Ordnungen ableitet. Das lehrt die Wichtigkeit der Vorschrift (5, III, 2, 3). Eine neue Bestätigung wird Folgendes zeigen.

Verschiedene Classen zu vershiedenen Summen (1, C)

9. Aufgabe. ${}^{n}C$, ${}^{n+1}D$ wechselseitig von einander abzuleiten.

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \ldots\ldots & \theta & \iota & \varkappa \\ 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Für n = 11, ist V VI

${}^{11}C$		${}^{12}D$	${}^{11}C$
=		=	=
ββκ	β	ββκ	ββκ
βγι	β	βγι	βγι
βδθ	β	βδθ	βδθ
βεη	β	βεη	βεη
βζζ	β	βζζ	βζζ
γγθ	β	γγθ	γγθ
γδη	β	γδη	γδη
γεζ	β	γεζ	γεζ
δδζ	β	δδζ	δδζ
δεε	β	δεε	δεε
	γ	γγη	
	γ	γδζ	
	γ	γεε	
	γ	δδε	
	δ	δδδ	

V. Aus ${}^{11}C$ zu deriviren ${}^{12}D$

1) Jeder Complexion der gegebenen Classe (${}^{11}C$) setze man β vor, so hat man die Ordnung β der zu derivirenden Classe (${}^{12}D$)

2) Daraus leite man die Ordnung γ, und daraus die Ordnung δ, u. s. w. ab (5, III, 2, 3) so lange man diese Regel anwenden kann.

Anmerkung. Hier wird wieder eine Ordnung gesucht, und aus dieser die folgende, u, s. w. die ubri-

gen, abgeleitet; wodurch das ganze Verfahren sehr einfach und leicht wird (8).

VI. Aus ^{12}D zu deriviren ^{11}C

1) Von der Complexion zur Ordnung β der gegebenen Classe (^{12}D) schneide man durch einen Verticalstrich die vordersten β ab.

2) An diesen Verticalstrich, wo er sich, neben dem lezten β endigt, ziehe man unter die übrigen, an diesem β liegenden, Buchstaben einen Horizontalstrich. Die Complexionen, die dieser Winkel faſst, geben zusammen die gesuchte Classe (^{11}C).

Anmerkung 1. Hatte man in (V) wenig, so hat man hier in (VI) fast gar nichts für die Auflösung zu thun. Das ganze Geschäft wird mit zwey Strichen abgethan, die einen Winkel einschlieſsen, und nichts kann leichter seyn, als diesen Winkel zu machen. Ich habe ihn mit Fleis auch bey der obigen dritten Colonne (für ^{11}C) beybehalten, zur deutlichen Nachweisung, daſs ihre Complexionen dieselben sind, die innerhalb des Winkels der zweyten Colonne (für ^{12}D) stehen, und daſs sie aus dieser nur a u s g e s c h n i t t e n und a u s g e h o b e n sind.

Anmerkung 2. Arithmetisch lies sich die Auflösung (VI) so ausdrücken: Alle Glieder der Gröſse (^{12}D) die β enthalten ($\beta^3\varkappa + \beta^2\gamma\iota \ldots + \beta\delta^2\zeta + \beta\delta\varepsilon^2$) dividire man durch β; der Quotient ($\beta^2\varkappa + \beta\gamma\iota \ldots \ldots + \delta^2\zeta + \delta\varepsilon^2$) giebt die Glieder der gesuchten Gröſse (^{11}C). Jene anschauliche combinatorische Darstellung mit ihren Folgen, ist gleichwohl diesem, zwar kurzen, aber trocknen arithmetischen Ausdrucke (dergleichen bey ARBOGAST mehrere hin und wieder vorkommen) weit überlegen.

β	β	$\varkappa$	⁹A
β	γ	ι	
β	δ	θ	
β	ε	η	
β	ζ	ζ	¹⁰B
γ	γ	θ	
γ	δ	η	
γ	ε	ζ	
δ	δ	ζ	
δ	ε	ε	¹¹C

10. Die aus (VI) erhaltene Classe ¹¹C läſst sich noch weiter eben so durch Winkel zerlegen, und die Classen ¹⁰B, ⁹A daraus ausschneiden oder evolviren.

Umgekehrt, wenn man von der ersten Classe ⁹A ausgeht, erhellet, wie sich diese in die zweyte Classe ¹⁰B, diese wieder in die dritte Classe ¹¹C, und diese in die vierte Classe ¹²D (9) involviren läſst, u. s. w. wenn man auf ¹³E, ¹⁴F,... fortgehen wollte.

Das führt auf die schon sattsam bekannten combinatorischen Evolutionen und Involutionen, auf die involutorischen Darstellungen, die gleichsam die Seele der combinatorishen Analysis sind.

¹¹E	β	β	β	β	θ ⁷A
	β	β	β	γ	η
	β	β	β	δ	ζ
	β	β	β	ε	ε ⁸B
	β	β	γ	γ	ζ
	β	β	γ	δ	ε
	β	β	δ	δ	δ ⁹C
	β	γ	γ	γ	ε
	β	γ	γ	δ	δ ¹⁰D
	γ	γ	γ	γ	δ

11. Auf diesem Wege läſst sich jede verlangte Classe zu einer gegebenen Summe, z. B. ¹¹E, involutorisch anordnen und darstellen. Denn weil aus ¹¹E sich ¹⁰D, ⁹C, ⁸B und ⁷A evolviren lassen, so darf man nur ⁷A = θ als Anfangsglied (*Origine des Derivations*) setzen, und daraus die Ordnungen von ⁸B, und daraus weiter die von ⁹C, und daraus die von ¹⁰D, und daraus endlich die von ¹¹E, sämmtliche Ordnungen von β an (der ersten) gerechnet, ableiten; indem man jeder Classe (sie sey nun entweder gegeben, wie ⁷A, oder durch Derivation gefunden, wie die übrigen) nach und nach β vorsetzt, ohne weiter etwas an den Endbuchstaben der Complexionen dieser Ordnung zu

ändern, und dann die übrigen Ordnungen (nach 5, III, 2, 3) jeder Classe weiter derivirt.

Dieses Verfahren habe ich bereits (Sml. I. S. 187, 188, §. 51) angegeben und an ^{10}D erläutert. Wie sich das dortige ^{10}D, aus dem hiesigen ^{11}E ausschneiden liefse, zeigt der erste Winkel linker Hand; nur müfsten auch statt

der hiesigen β, γ, δ, ε, ζ, η, θ

die dortigen a, b, c, d, e, f, g gesetzt werden.

Eine nützliche Folgerung aus obiger Darstellung der Classen, hier (13).

An sich ist es nicht nothwendig, die Winkel jedesmal zu ziehen, und man kann sie ohne Nachtheil vollkommen entbehren. Aber sie dienen, wie in die Augen fällt, zu deutlicher Nachweisung, wie sich eine Classe aus der andern deriviren läfst; und sind in dieser Rücksicht nützlich.

12. Das giebt ein neues Mittel einer sogenannten independenten (combinatorisch-dependenten, und daher äufserst leichten) Darstellung (7, Anm.) an die Hand, die vor jener noch Vorzüge hat. Dort mufste man, die Ordnung β der geforderten Classe zu machen, die vorhergehende Classe zu derselben Summe vor Augen haben, und das hat keine Schwierigkeit, wenn man die Classen ^{n}A, ^{n}B, ^{n}C ... nach der Ordnung sucht, nicht aber wenn man eine aufser der Ordnung braucht. Freylich mufs man, z. B. hier für ^{11}E, die Classen ^{7}A, ^{8}B, ^{9}C. ^{10}D nach und nach produciren, welches, auf den ersten Anblick, weitläuftig zu seyn scheint. Aber, wie durch ein Wunderwerk für den, der die erste Erfahrung dieser Art macht, wirkt hier die Evolution dahin, dafs man zwar alle diese Classen, und wie sie einander bestimmen, auf einmal dargestellt vor Augen hat, dennoch aber für sie nichts weiter hat schreiben dürfen, als man für die Classe ^{11}E nothwendig hat schreiben müssen. Nichts darf hier verrückt, nichts geändert werden; alles ist vollkommen reducirt,

alles auf die einfachste Art, das heiſst, involutorisch-combinatorisch angeordnet.

So etwas ist durch arithmetische Operationen und Hulfsmittel nicht zu erreichen, ist auch den gewöhnlichen bekannten analytischen Vorträgen ganz fremd. Daſs aber auch solche Darstellungen analytisch genannt werden können und mit welchem Rechte ich selbige, als analytische Hülfsmittel unter die übrigen, aufgestellt habe, läſst sich schon aus dem Wenigen hier angeführten übersehen. Ausführlicher davon (133, 135). Hier geht man durchgängig bis auf die Elemente, auf ihre Anordnung und Verbindung mit einander, zurück, und benützt die Vortheile, die sich durch die Stellung derselben ergeben. Auch hier, wie in den schönen Künsten, ist Darstellung die Hauptsache, der letzte und höchste Zweck. Wer ein bloſs mechanisches Verfahren [b]) darinn zu finden glaubte, der würde die ganz einfachen Gründe übersehen, auf welche die aufgeführten Regeln und Vorschriften sich stützen, und daſs nur deswegen die involutorisch-combinatorischen Darstellungen so analytisch lehrreich sind, und die gesuchte Gröſse mit allen ihren Theilen, und deren Dependenzen von einander, wie man will, gehörig verbunden und zugleich getrennt, mit einem Blick' übersehen lassen.

13. Arbogast, den sein derivatives Substitutions verfahren auf die combinatorischen Regeln (I—IV) lei-

b) Die gewöhnlichen involutorisch - combinatorischen Darstellungen sind eben so wenig blos mechanische Verfahren, als es die ihnen ganz gleichgültigen Derivationen sind. Daſs bey jenen oft Winkel gebraucht werden, qualificirt sie eben so wenig dazu; denn diese Winkel sind nicht nothwendig und man kann sie ganz entbehren (11). Solche figürliche Anordnungen hingegen (wie Sml. I. S. 204, 208), wo die Complexionen in besondere Fächer zusammengeordnet werden, kann man eher, wenn man will, mechanisch nennen. Davon ausführlicher (S. 289—291).

tete, in die es sich endlich auflöst, hat von den Regeln (V, VI) nichts bemerkt, die sich aus jenem Verfahren auch ableiten lassen. Eine Darstellung wie die z. B. ^{11}E (in 11) ist recht dazu geeignet, jede Classe als eine Summe niedrigerer Classen unmittelbar auszudrücken; und so wäre denn, im obigen Falle,

$$^{11}E \begin{pmatrix} \beta & \gamma & \ldots & \eta & \theta \\ 1 & 2 & \ldots & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \beta^4\,{}^7A + \beta^3\,{}^8B + \beta^2\,{}^9C + \beta^1\,{}^{10}D + \beta^0\,{}^{11}E \begin{pmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \beta^4\,{}^6A + \beta^3\,{}^6B + \beta^2\,{}^6C + \beta^1\,{}^6D + \beta^0\,{}^6E \begin{pmatrix} \gamma & \delta & \ldots & \eta & \theta \\ 1 & 2 & \ldots & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Man vergleiche (Sml. I. S. 189, 190, 191, 192, 237).

Hier sind: 1) Die Werthe der ^7A, ^8B, ^9C, ^{10}D, ^{11}E (in 13 und 11), wegen der verschiedenen Zeiger $\begin{pmatrix} \gamma, & \delta & \ldots \\ 2, & 3 & \ldots \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \beta, & \gamma & \ldots \\ 1, & 2 & \ldots \end{pmatrix}$, nicht einerley, sondern verschieden. Man vergleiche (Sml. I. S. 189, 190). 2) Der leztere Ausdruck durch ^6A, ^6B, ^6C, ^6D, ^6E (dieselben Classen, wie vorher, aber zu der niedrigern, durchaus gleichen, Summe 6, und dem einfachern Zeiger von 1 an) ist der bequemere und gewöhnlich benuzte. 3) Dieser bequemere Ausdruck stimmt auch zu der combinatorischen allgemeinen Zerlegungsformel (61, vergl. 66), durch welche mit den Literalproducten für die Classen zugleich die numerischen Coefficienten gegeben werden.

14. Wenn eine Classe ^nM auf den Zeiger $\begin{pmatrix} \beta, & \gamma, & \delta \ldots \\ 1, & 2, & 3 \ldots \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \gamma, & \delta, & \varepsilon \ldots \\ 2, & 3, & 4 \ldots \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} \delta, & \varepsilon, & \zeta \ldots \\ 3, & 4, & 5 \ldots \end{pmatrix}$ u. s. w. bezogen wird, so verlangt man ihre Comple-

xionen, von der Ordnung 1 oder β an, also die ganze Classe; oder von der Ordnung 2 oder γ, oder von der Ordnung 3 oder δ an, u. s. w.; also nur einen Theil dieser Classe. Diesen Theil der Classe giebt die Involution (11) eben so leicht als die ganze Classe.

$$\begin{array}{c|c|c|c l}
\gamma & \gamma & \gamma & \eta & {}^{6}A \\
\gamma & \gamma & \delta & \zeta & \\
\gamma & \gamma & \varepsilon & \varepsilon & \\ \cline{3-4}
 & & & & {}^{8}B \\
\gamma & \delta & \delta & \varepsilon & \\ \cline{2-4}
 & & & & {}^{10}C \\
\delta & \delta & \delta & \delta &
\end{array}$$

So wäre für ${}^{12}D \begin{pmatrix} \gamma, \delta, \varepsilon \ldots \\ 2, 3, 4 \ldots \end{pmatrix}$ die erste Complexion der Ordnung 2 oder γ, hier $\gamma\gamma\gamma\eta$, gegeben; und daraus, oder vielmehr aus $\eta = {}^{6}A$, als *Origine*, werden die übrigen durch Involution hergeleitet. Was also in (9, V) für die Ordnung γ in ${}^{12}D$ mittelbar (durch Ableitung von der ersten, β) geschieht, das geschieht hier unmittelbar (von der ersten Ordnung unabhängig) durch das gegebene Anfangsglied η.

So viel von der so merkwürdigen Classendarstellung und Classenbeziehung in (V, VI).

Verschiedene Classen zu vershiedenen Summen (1, C)

15. Aufgabe. ${}^{n+1}D$, ${}^{n}E$ wechselseitig von einander abzuleiten.

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \ldots & \theta & \iota & \varkappa \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Für $n = 11$, ist VII ⌒ VIII

${}^{12}D$	${}^{11}E$	${}^{12}D$
=	=	=
$\beta\beta\beta\varkappa$	$\beta\beta\beta\beta\theta$	$\beta\beta\beta\varkappa$
$\beta\beta\gamma\iota$	$\beta\beta\beta\gamma\eta$	$\beta\beta\gamma\iota$
$\beta\beta\delta\theta$	$\beta\beta\beta\delta\zeta$	$\beta\beta\delta\theta$
$\beta\beta\varepsilon\eta$	$\beta\beta\beta\varepsilon\varepsilon$	$\beta\beta\varepsilon\eta$
$\beta\beta\zeta\zeta$	$\beta\beta\gamma\gamma\zeta$	$\beta\beta\zeta\zeta$
: : : :	: : : : :	: : : :
(wie in 9)	(wie in 11)	(wie in 9)

VII. Aus ^{12}D zu deriviren ^{11}E

Aus ^{12}D derivire man

$$\left\{\begin{array}{l} ^{11}D\,(3,\ II) \\ ^{12}E\,(5,\ III) \end{array}\right\} \text{ und daraus } ^{11}E \left\{\begin{array}{l} 5,\ III \\ 3,\ II \end{array}\right\}$$

VIII. Aus ^{11}E zu deriviren ^{12}D

Aus ^{11}E derivire man

$$\left\{\begin{array}{l} ^{12}E\,(3,\ I) \\ ^{11}D\,(5,\ IV) \end{array}\right\} \text{ und daraus } ^{12}D \left\{\begin{array}{l} 5,\ IV \\ 3,\ I \end{array}\right\}$$

16. Hier mufs man immer zwey Derivationen machen, wodurch die Auflösung etwas weitläuftiger wird, als die vorigen (I — VI). Wollte man beyde Derivationen in eine Regel zusammenfassen (wie für III, IV geschehen, und in der Anmerkung zu (5, III) ist erinnert worden), so würde die Regel dafür zu verwikkelt werden. Beyde Fälle kommen in der Anwendung selten oder gar nicht vor. Ich will mich also nicht länger dabey aufhalten. Sie sind blos der Verbindung wegen, in welcher sie mit den vorhergehenden stehen (1), hier aufgeführt worden.

17. Es wird (*Calc. des Der. Préf. p.* V) als ein Vorzug der derivativen Regeln für die Entwickelung der Polynomialgröfsen gerühmt, dafs sie mit den Literalproducten auch zugleich die zugehörigen Zahlencoefficienten geben. Da aber dadurch 1) das combinatorische Gesetz für jene Buchstabencomplexionen unterbrochen, das Verfahren, durch vorher zu treffende Vorbereitungen [no. 43, 47], verwickelter gemacht, und die Aufmerksamkeit zwischen zwey Gegenstände verschiedener Art, zwey combinatorisch-verschiedene Elemente, getheilt wird, 2) die einzelnen Factoren der Zahlen-

coefficienten zerstreut vorkommen, auch die Producte aus ihnen erst reducirt werden müssen, 3) die Zahlencoefficienten der Literalproducte aus leichten Regeln sich ergeben, diese Coefficienten ganz reducirt vorläufig zum künftigen Gebrauch in Tafeln sich aufstellen [c]), mehrere derselben auch bey wiederholter Anwendung (und gerade die am häufigsten vorkommenden) sich leicht auswendig behalten lassen: so ist es unstreitig vortheilhafter, die beyden von einander verschiedenen Elemente, nicht mit einander, sondern eins nach dem andern, zu bestimmen (133).

Als Beleg hierzu kann das von Arbogast [*p*. 40] nach [no. 47] ausgeführte Beyspiel dienen, welches alle zu

$$\frac{\mathrm{D}^8.\varphi\,\alpha}{1.2..8} = \frac{\mathrm{D}\varphi\,\alpha}{1}\,\mathfrak{a}^8\mathrm{A} + \frac{\mathrm{D}^2\varphi\,\alpha}{1.2}\,\mathfrak{b}^8\mathrm{B} + \frac{\mathrm{D}^3\varphi\,\alpha}{1.2.3}\,\mathfrak{c}^8\mathrm{C} + \text{etc.}$$

gehörige Polynomialgröfsen enthält. Die Combinationslehre kann auf mehrern Wegen jede dieser Gröfsen,

z. B. $\frac{\mathrm{D}^4\ .\ \beta^4}{1.2.3.4} = \mathfrak{b}\,{}^8\mathrm{D}$ auf den Zeiger

$\begin{pmatrix} \beta, \gamma, \delta \ldots \iota \\ 1, 2, 3 \ldots 8 \end{pmatrix}$ bezogen, darstellen:

1) Findet man, wenn man etwa alle Classen brauchte, und $\mathfrak{a}^8\mathrm{A}$, $\mathfrak{b}^8\mathrm{B}$, ... hinter einander, aus dem

c) Hierher meine Tafel aller möglichen Literalproducte von 1, 2, 3 ... 10 Factoren, bey denen Wiederholungen verstattet sind, nebst den zugehörigen Versetzungszahlen oder Polynomialcoefficienten (*Infin. Dignit. Tab.* VI. *p*. 168, 169). So leicht auch das Auffinden dieser Zahlen an sich ist, so ist doch das blofse Abschreiben derselben aus jener Tafel noch leichter, und kann wenigstens, wenn viel Factoren vorkommen, zu Prüfung der vorher gefundenen Zahlen dienen.

Anfange $\iota = \mathfrak{a}\,{}^8A$ nach (7) entwickelte, auch $\mathfrak{d}\,{}^8D$ in seiner Ordnung.

2) Läſst sich $\mathfrak{d}\,{}^8D$ auch unmittelbar darstellen.

$$\mathfrak{d}\,{}^8D \quad \begin{array}{r|c|c|c|l} 4\,\beta & \beta & \beta & \zeta & {}^5A \\ 12\,\beta & \beta & \gamma & \varepsilon & \\ 6\,\beta & \beta & \delta & \delta & {}^6B \\ 12\,\beta & \gamma & \gamma & \delta & {}^7C \\ 1\,\gamma & \gamma & \gamma & \gamma & \end{array}$$

Denn weil sich ${}^8D$ in ${}^7C$, ${}^6B$, ${}^5A$ zerlegen läſst (11); so darf man nur ${}^5A = \zeta$ als *Origine* der Classe ${}^8D$ annehmen, und (auf eine ähnliche Art, wie in 11) daraus die Ordnung ${}^6B$, und daraus die Orduung ${}^7C$, und aus dieser die ganze Classe ${}^8D$ ableiten; und hinterher die einzelnen Complexionen mit den zugehörigen numerischen oder Polynomialcoefficienten versehen. Endlich

3) Weil (62) $\dfrac{D^4 \cdot \beta^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = \mathfrak{d}^8 D = \mathfrak{d}^{4+4} D$, und

$$\mathfrak{d}^{4+4}D \begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$ {}^4\mathfrak{A}\,\beta^3\,\mathfrak{a}^4 A + {}^4\mathfrak{B}\,\beta^2\,\mathfrak{b}^4 B + {}^4\mathfrak{C}\,\beta^1\,\mathfrak{c}^4 C + {}^4\mathfrak{D}\,\beta^0\,\mathfrak{d}^4 D$$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

so kommt

$$\mathfrak{d}^8 D = 4\beta^3\zeta + 6\beta^2\,[2\gamma\varepsilon + \delta^2] + 4\beta\cdot3\gamma^2\delta + 1\gamma^4$$

wie bey ARBOGAST [*p.* 40]. Diese lezte combinatorische Zerlegung giebt also, wie gewöhnlich, die Literalproducte mit den zugehörigen numerischen, Binomial- und Polynomial-coefficienten, zusammen.

18. In diesem Anhange habe ich, aus dem so weitläuftigen Felde combinatorischer Veränderungen,

nur die Verbindungen zu bestimmten Summen mit Wiederholungen, und zwar nach Classen, nicht allgemein lexikographisch geordnet, ausheben, auch von den so mannichfaltig verschiedenen Involutionen nur das Wenige, was oben (in 9, 10, 11, 14) steht, beybringen können. Von lexikographischen und andern involutorischen Anordnungen habe ich in mehrern, im Archiv und den beyden Sammlungen befindlichen, Aufsätzen ausführlich gehandelt; auf welche ich diejenigen Leser, die näher davon unterrichtet seyn wollen, verweisen mufs.

ZWEYTER ANHANG

EINIGE DERIVATIVE UND COMBINATORISCHE TAFELN.

Tafel I.

Derivativ- und combinatorisch-gezeichnete Polynomialgröſsen und ihre Beziehung auf einander

$\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \zeta x^4 + \eta x^5$ etc. $= p$

(A) Derivativ ausgedrückte Potenzen von p

$$p = \beta + \frac{D \cdot \beta}{1} x + \frac{D^2 \cdot \beta}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots \ldots + \frac{D^n \cdot \beta}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n$$

$$p^2 = \beta^2 + \frac{D \cdot \beta^2}{1} x + \frac{D^2 \cdot \beta^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots \ldots + \frac{D^n \cdot \beta^2}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n$$

$$p^3 = \beta^3 + \frac{D \cdot \beta^3}{1} x + \frac{D^2 \cdot \beta^3}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots \ldots + \frac{D^n \cdot \beta^3}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n$$

$$p^4 = \beta^4 + \frac{D \cdot \beta^4}{1} x + \frac{D^2 \cdot \beta^4}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots \ldots + \frac{D^n \cdot \beta^4}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n$$

$$p^5 = \beta^5 + \frac{D \cdot \beta^5}{1} x + \frac{D^2 \cdot \beta^5}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^5}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots \ldots + \frac{D^n \cdot \beta^5}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n$$

: : : : : :

$$p^m = \beta^m + \frac{D \cdot \beta^m}{1} x + \frac{D^2 \cdot \beta^m}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{D^3 \cdot \beta^m}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \ldots \ldots + \frac{D^n \cdot \beta^m}{1 \cdot 2 \ldots n} x^n$$

Tafel I. Fortsetzung.

(B) Combinatorisch ausgedrückte Potenzen von p

$$p^1 = \mathfrak{a}^1 A + \mathfrak{a}^2 A x + \mathfrak{a}^3 A x^2 + \mathfrak{a}^4 A x^3 + \ldots + \mathfrak{a}^{n+1} A x^n$$

$$p^2 = \mathfrak{b}^2 B + \mathfrak{b}^3 B x + \mathfrak{b}^4 B x^2 + \mathfrak{b}^5 B x^3 + \ldots + \mathfrak{b}^{n+2} B x^n$$

$$p^3 = \mathfrak{c}^3 C + \mathfrak{c}^4 C x + \mathfrak{c}^5 C x^2 + \mathfrak{c}^6 C x^3 + \ldots + \mathfrak{c}^{n+3} C x^n$$

$$p^4 = \mathfrak{d}^4 D + \mathfrak{d}^5 D x + \mathfrak{d}^6 D x^2 + \mathfrak{d}^7 D x^3 + \ldots + \mathfrak{d}^{n+4} D x^n$$

$$p^5 = \mathfrak{e}^5 E + \mathfrak{e}^6 E x + \mathfrak{e}^7 E x^2 + \mathfrak{e}^8 E x^3 + \ldots + \mathfrak{e}^{n+5} E x^n$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$p^m = \mathfrak{m}^m M + \mathfrak{m}^{m+1} M x^1 + \mathfrak{m}^{m+2} M x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \mathfrak{m}^{m+n} M x^n.$$

(C) Vergleichung der einzelnen Coefficienten in (A, B) gegen einander

$$\beta = p \varkappa 1 = \mathfrak{a}^1 A = \beta$$

$$\frac{\mathrm{D} \,.\, \beta^1}{1} = p \varkappa 2 = \mathfrak{a}^2 A = \gamma$$

$$\frac{\mathrm{D}^2 \,.\, \beta^1}{1 \,.\, 2} = p \varkappa 3 = \mathfrak{a}^3 A = \delta$$

$$\frac{\mathrm{D}^3 \,.\, \beta^1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = p \varkappa 4 = \mathfrak{a}^4 A = \varepsilon$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\mathrm{D}^n \,.\, \beta^1}{1 \,.\, 2 \,.\,.\, n} = p \varkappa (n+1) = \mathfrak{a}^{n+1} A = \overset{n}{\beta}$$

Tafel I. Fortsetzung.

$$\beta^2 = p^2 \varkappa 1 = \mathfrak{b}^2 B$$

$$\frac{D \cdot \beta^2}{1} = p^2 \varkappa 2 = \mathfrak{b}^3 B$$

$$\frac{D^2 \cdot \beta^2}{1 \cdot 2} = p^2 \varkappa 3 = \mathfrak{b}^4 B$$

$$\frac{D^3 \cdot \beta^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = p^2 \varkappa 4 = \mathfrak{b}^5 B$$

: : : :

$$\frac{D^n \cdot \beta^2}{1 \cdot 2 \ldots n} = p^2 \varkappa (n+1) = \mathfrak{b}^{n+2} B$$

$$\beta^3 = p^3 \varkappa 1 = \mathfrak{c}^3 C$$

$$\frac{D \cdot \beta^3}{1} = p^3 \varkappa 2 = \mathfrak{c}^4 C$$

$$\frac{D^2 \cdot \beta^3}{1 \cdot 2} = p^3 \varkappa 3 = \mathfrak{c}^5 C$$

$$\frac{D^3 \cdot \beta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = p^3 \varkappa 4 = \mathfrak{c}^6 C$$

: : : :

$$\frac{D^n \cdot \beta^3}{1 \cdot 2 \ldots n} = p^3 \varkappa (n+1) = \mathfrak{c}^{n+3} C$$

u. s. w.

$$\begin{pmatrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta \ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \end{pmatrix}$$

Tafel I. Fortsetzung.

(D) Identische Reductionsformeln

derivative (58, III) combinatorische (61, 62)

Arbogastische	Hindenburgische
$\frac{D^n . \beta^m}{1.2..n}$	$= \mathfrak{m}^{m+n}\mathfrak{M}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \ldots\end{pmatrix}$
$= D\,\beta^m . \frac{D^{n-1} . \gamma}{1.2.3.n-1}$	$= {}^m\mathfrak{A}\,\beta^{m-1} . \mathfrak{a}^n A$
$+ \frac{D^2\,\beta^m}{1.2} . \frac{D^{n-2} . \gamma^2}{1.2..n-2}$	$+ {}^m\mathfrak{B}\,\beta^{m-2} . \mathfrak{b}^n B$
$+ \frac{D^3\,\beta^m}{1.2.3} . \frac{D^{n-3} . \gamma^3}{1.2..n-3}$	$+ {}^m\mathfrak{C}\,\beta^{m-3} . \mathfrak{c}^n C$
, ,	, ,
$+ \frac{D^n\,\beta^m}{1.2..n} . \gamma^n$	$+ {}^m\mathfrak{N}\,\beta^{m-n} . \mathfrak{n}^n N$

$$\begin{pmatrix}\gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta & \ldots\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots\end{pmatrix}$$

Exempel zu (D)

Für $m = 4$ und $n = 6$, ist

$\frac{D^6 . \beta^4}{1.2.3.4}$	$= \mathfrak{d}^{4+6}D\begin{pmatrix}\beta & \gamma & \delta & \varepsilon & ..\\ 1 & 2 & 3 & 4 & ..\end{pmatrix}$
$= D\,\beta^4 . \frac{D^5 . \gamma}{1.2..5}$	$= {}^4\mathfrak{A}\,\beta^3 . \mathfrak{a}^6 A$
$+ \frac{D^2\,\beta^4}{1.2} . \frac{D^4 . \gamma^2}{1.2.3.4}$	$+ {}^4\mathfrak{B}\,\beta^2 . \mathfrak{b}^6 B$
$+ \frac{D^3\,\beta^4}{1.2.3} . \frac{D^3 . \gamma^3}{1.2.3}$	$+ {}^4\mathfrak{C}\,\beta^1 . \mathfrak{c}^6 C$
$+ \frac{D^4\,\beta^4}{1.2.3.4} . \frac{D^2 . \gamma^4}{1.2}$	$+ {}^4\mathfrak{D}\,\beta^0 . \mathfrak{d}^6 D$

$$\begin{pmatrix}\gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$$

Dies ist die erste Evolution in γ, des zweyten Exempels in der folgenden Tafel III. Auf eben die Art werden auch die übrigen Evolutionen in δ, ε, ζ, η, θ, bis zur lezten ganz reducirten, behandelt; wie aus der angeführten Tafel deutlich zu ersehen ist.

Tafel II.

Verschiedene, arithmographische und lexikographische Darstellungen combinatorischer Deductionen oder Derivationen, die von einem bestimmten Anfange (*Origine*) ausgehen

I.

¹²E

β β β β ι ⁸A
β β β γ θ
β β β δ η
β β β ε ζ ⁹B
β β γ γ η
β β γ δ ζ
β β γ ε ε
β β δ δ ε ¹⁰C
β γ γ γ ζ
β γ γ δ ε
β γ δ δ δ ¹¹D
γ γ γ γ ε
γ γ γ δ δ

II.

θ ⁷A
β η
γ ζ
δ ε ⁷B
β β ζ
β γ ε
β δ δ
γ γ δ ⁷C
β β β ε
β β γ δ
β γ γ γ ⁷D
β β β β δ
β β β γ γ ⁷E
β β β β β γ ⁷F
β β β β β β β ⁷G

III.

etc. β β β β β β β
β β β β β γ
β β β β δ
β β β γ γ
etc. β β β ε
β β γ δ
β β ζ
etc. β γ γ γ
β γ ε
β δ δ
β η
etc. γ γ δ
γ η
δ ε
θ

etc. etc.

$$\left(\begin{matrix} \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta & \iota & \varkappa \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix}\right)$$

Tafel II. Fortsetzung.

IV.	V.
$\beta^{n-1}[\beta]$	β^7
$\beta^{n-2}[\gamma]$	$\beta^5\gamma$
$\beta^{n-3}[\delta]$	$\beta^3\gamma^2$
$\beta^{n-4}[\gamma^2, \varepsilon]$	$\beta\gamma^3$
$\beta^{n-5}[\gamma\delta, \zeta]$	$\beta^4\delta$
$\beta^{n-6}[\gamma^3, \gamma\varepsilon, \delta^2, \eta]$	$\beta^2\gamma\delta$
$\beta^{n-7}[\gamma^2\delta, \gamma\zeta, \delta\varepsilon, \theta]$	$\gamma^2\delta$
$\beta^{n-8}[\gamma^4, \gamma^2\varepsilon, \gamma\delta^2, \gamma\eta, \delta\zeta,$	$\beta\delta^2$
$\varepsilon^2, \iota]$	$\beta^3\varepsilon$
$\beta^{n-9}[\gamma^3\delta, \gamma^2\zeta, \gamma\delta\varepsilon, \gamma\theta, \delta^3, \delta\eta,$	$\beta\gamma\varepsilon$
$\varepsilon\zeta, \varkappa]$	$\delta\varepsilon$
$\beta^{n-10}[\gamma^5, \gamma^3\varepsilon, \gamma^2\delta^2, \gamma^2\eta, \gamma\delta\zeta,$	$\beta^2\zeta$
$\gamma\varepsilon^2, \gamma\iota, \delta^2\varepsilon, \delta\theta, \varepsilon\eta, \zeta^2, \lambda]$	$\gamma\zeta$
	$\beta\eta$
etc. etc. etc.	θ

Man vergleiche,
wegen I (Sml. I. S. 187, 188);
wegen II (Sml. I. S. 183. §. 42);
wegen III (Sml. I. S. 183; Sml. II. S. 17);
wegen IV (Sml. I. S. 202, 280, 281; Sml. II. S. 17);
wegen V (Sml. I. S. 183; Sml. II. S. 18).

Tafel III.

Zwey derivativ-evolvirte und vollständig reducirte Arbogastische Beyspiele.

(A) Erstes Schema. (B) Zweytes Schema.

(Man sehe die groſse Tafel S. 337.)

Nachricht wegen Tafel III.

Diese Tafel, die hier unmittelbar nach Tafel II folgen sollte, läuft zu sehr in die Breite aus, als daſs sie hier hätte Platz finden können. Sie ist daher, auf einem halben Bogen abgedruckt, ganz zu Ende der Schrift, nach Seite 336, geliefert worden, und kann, gehörig zusammen gebrochen, von dem Buchbinder, als Seite 337, eingebunden werden.

Tafel IV. Coefficienten der

Vierter Coefficient des Pro-

(A) Arbogastische Darstellung (109. D)				(B) Variationsinvolution in Zahlen für eine Reihe				(C) Correspondirende Buchstabeninvolution für mehrere Reihen			
𝔄	a	a	δ	1	1	1	4	𝔄	a	a	δ
𝔄	a	b	γ	1	1	2	3	𝔄	a	b	γ
𝔄	b	a	γ	1	1	3	2	𝔄	a	c	β
𝔅	a	a	γ	1	1	4	1	𝔄	a	d	α
𝔄	a	c	β	1	2	1	3	𝔄	b	a	γ
𝔄	b	b	β	1	2	2	2	𝔄	b	b	β
𝔅	a	b	β	1	2	3	1	𝔄	b	c	α
𝔄	c	a	β	1	3	1	2	𝔄	c	a	β
𝔅	b	a	β	1	3	2	1	𝔄	c	b	α
ℭ	a	a	β	1	4	1	1	𝔄	d	a	α
𝔄	a	d	α	2	1	1	3	𝔅	a	a	γ
𝔄	b	c	α	2	1	2	2	𝔅	a	b	β
𝔅	a	c	α	2	1	3	1	𝔅	a	c	α
𝔄	c	b	α	2	2	1	2	𝔅	b	a	β
𝔅	b	b	α	2	2	2	1	𝔅	b	b	α
ℭ	a	b	α	2	3	1	1	𝔅	c	a	α
𝔄	d	a	α	3	1	1	2	ℭ	a	a	β
𝔅	c	a	α	3	1	2	1	ℭ	a	b	α
ℭ	b	a	α	3	2	1	1	ℭ	b	a	α
𝔇	a	a	α	4	1	1	1	𝔇	a	a	α

Die Arbogastische Darstellung (A) ist auch involutorisch, wie die Winkel nachweisen. Zählt man in A und C die Complexionen nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3 . . . 20, von oben herunter, so stimmen die Complexionen

1 in C vorwärts; von der Linken nach der Rechten
20 in A rückwärts; - - Rechten - - Linken

2 in C vorwärts, von der Linken nach der Rechten
19 in A rückwärts; - - Rechten - - Linken

u. s. w. gelesen, vollkommen zusammen. Die Winkel befassen dieselben Buchstaben; nur die Alphabete sind verschieden, worauf bey der Involution nichts ankommt (121). Die Anfänge (*Origines*) von (A) und (C) sind hier 𝔇 und δ.

Producte mehrerer Reihen.

ducts der Reihen s, r, q, p, das ist $^{7}\overset{srqp}{D}$ (122)

(D)		(D*)
𝔄𝔞aδ, 𝔄𝔞bγ, 𝔄𝔞cβ, 𝔄𝔞dα	oder	𝔄𝔞 (aδ, bγ, cβ, dα)
𝔄𝔟aγ, 𝔄𝔟bβ, 𝔄𝔟cα	-	𝔄𝔟 (aγ, bβ, cα)
𝔄𝔠aβ, 𝔄𝔠bα	-	𝔄𝔠 (aβ, bα)
𝔄𝔡aα	-	𝔄𝔡 (aα)
𝔅𝔞aγ, 𝔅𝔞bβ, 𝔅𝔞cα	-	𝔅𝔞 (aγ, bβ, cα)
𝔅𝔟aβ, 𝔅𝔟bα	-	𝔅𝔟 (aβ, bα)
𝔅𝔠aα	-	𝔅𝔠 (aα)
ℭ𝔞aβ, ℭ𝔞bα	-	ℭ𝔞 (aβ, bα)
ℭ𝔟aα	-	ℭ𝔟 (aα)
𝔇𝔞aα	-	𝔇𝔞 (aα)

Hier ist (D), wie im *Nov. Syst. Permutt.* p. LXXV, nach Anfangs- und Endbuchstaben dargestellt. Die Vergleichung mit (C) zeigt deutlich, wie (D) aus (C) folgt, und wie man statt (C) zu entwickeln, sogleich (D) schreiben kann. Dafür braucht man eigentlich blos die Ordnung 𝔄 zu schreiben; denn jede nächstfolgende Ordnung läſst sich, hier auf eben die Art wie dort, aus der unmittelbar vorhergehenden, ableiten, z. B. die Ordnung 𝔅 aus der vorhergefundenen 𝔄, und ℭ aus 𝔅, und 𝔇 aus ℭ; und so in andern Fällen, bey mehrern Ordnungen.

Zugleich rechtfertigen (D) und (D*) die in (123) gezogenen Folgen (I, II) durch den Augenschein, vermöge der figürlichen Anordnung und Zerfällung in Factoren. Aber auch unabhängig von solchen Formen lassen sich diese Formeln, und andere, leicht combinatorisch darthun und erweisen.

Tafel IV. Coefficienten der

Fünfter Coefficient des Pro-

(E) Arbogastische Darstellung (112, A_4)

𝔄	𝔞	a	ε
𝔄	𝔞	b	δ
𝔄	𝔟	a	δ
𝔅	𝔞	a	δ
𝔄	𝔞	c	γ
𝔄	𝔟	b	γ
𝔅	𝔞	b	γ
𝔄	𝔠	a	γ
𝔅	𝔟	a	γ
ℭ	𝔞	a	γ
𝔄	𝔞	d	β
𝔄	𝔟	c	β
𝔅	𝔞	c	β
𝔄	𝔠	b	β
𝔅	𝔟	b	β
ℭ	𝔞	b	β
𝔄	𝔡	a	β
𝔅	𝔠	a	β
ℭ	𝔟	a	β
𝔇	𝔞	a	β
𝔄	𝔞	e	α
𝔄	𝔟	d	α
𝔅	𝔞	d	α
𝔄	𝔠	c	α
𝔅	𝔟	c	α
ℭ	𝔞	c	α
𝔄	𝔡	b	α
𝔅	𝔠	b	α
ℭ	𝔟	b	α
𝔇	𝔞	b	α
𝔄	𝔢	a	α
𝔅	𝔡	a	α
ℭ	𝔠	a	α
𝔇	𝔟	a	α
𝔈	𝔞	a	α

(F) Variationsinvolution für eine Reihe (Sml. I. S. 187, 49)

α	α	α	ε
α	α	β	δ
α	α	γ	γ
α	α	δ	β
α	α	ε	α
α	β	α	δ
α	β	β	γ
α	β	γ	β
α	β	δ	α
α	γ	α	γ
α	γ	β	β
α	γ	γ	α
α	δ	α	β
α	δ	β	α
α	ε	α	α
β	α	α	δ
β	α	β	γ
β	α	γ	β
β	α	δ	α
β	β	α	γ
β	β	β	β
β	β	γ	α
β	γ	α	β
β	γ	β	α
β	δ	α	α
γ	α	α	γ
γ	α	β	β
γ	α	γ	α
γ	β	α	β
γ	β	β	α
γ	γ	α	α
δ	α	α	β
δ	α	β	α
δ	β	α	α
ε	α	α	α

(G) Correspondirende Combinationsinvolution für mehrere Reihen (280, 281)

𝔄	𝔞	a	ε
𝔄	𝔞	b	δ
𝔄	𝔞	c	γ
𝔄	𝔞	d	β
𝔄	𝔞	e	α
𝔄	𝔟	a	δ
𝔄	𝔟	b	γ
𝔄	𝔟	c	β
𝔄	𝔟	d	α
𝔄	𝔠	a	γ
𝔄	𝔠	b	β
𝔄	𝔠	c	α
𝔄	𝔡	a	β
𝔄	𝔡	b	α
𝔄	𝔢	a	α
𝔅	𝔞	a	δ
𝔅	𝔞	b	γ
𝔅	𝔞	c	β
𝔅	𝔞	d	α
𝔅	𝔟	a	γ
𝔅	𝔟	b	β
𝔅	𝔟	c	α
𝔅	𝔠	a	β
𝔅	𝔠	b	α
𝔅	𝔡	a	α
ℭ	𝔞	a	γ
ℭ	𝔞	b	β
ℭ	𝔞	c	α
ℭ	𝔟	a	β
ℭ	𝔟	b	α
ℭ	𝔠	a	α
𝔇	𝔞	a	β
𝔇	𝔞	b	α
𝔇	𝔟	a	α
𝔈	𝔞	a	α

Was (S. 330) von den Complexionen, 1 in C und 20 in A; von 2 in C und 19 in A; u. s. w. erinnert worden ist, gilt hier, von 1 in G und 35 in E; von 2 in G und 34 in E; u. s. w. Die Anfänge (*Origines*) von (E) und (G) sind hier 𝔈 und ε.

Producte mehrerer Reihen.

ducts der Reihen p, q, r, s, das ist ${}^{8}\overset{srpq}{D}$ (124)

(H) Darstellung von $\overset{srqp}{D}$, nach Anfangs- und Endbuchstaben geordnet (S. 331)

(H)		(H*)
𝔄𝔞aε, 𝔄𝔞bδ, 𝔄𝔞cγ, 𝔄𝔞dβ, 𝔄𝔞eα,	das ist	𝔄𝔞 (aε, bδ, cγ, dβ, eα)
𝔄𝔟aδ, 𝔄𝔟bγ, 𝔄𝔟cβ, 𝔄𝔟dα,	- -	𝔄𝔟 (aδ, bγ, cβ, dα)
𝔄𝔠aγ, 𝔄𝔠bβ, 𝔄𝔠cα,	- -	𝔄𝔠 (aγ, bβ, cα)
𝔄𝔡aβ, 𝔄𝔡bα,	- -	𝔄𝔡 (aβ, bα)
𝔄𝔢aα,	- -	𝔄𝔢 (aα)
𝔅𝔞aδ, 𝔅𝔞bγ, 𝔅𝔞cβ, 𝔅𝔞dα,	- -	𝔅𝔞 (aδ, bγ, cβ, dα)
𝔅𝔟aγ, 𝔅𝔟bβ, 𝔅𝔟cα,	- -	𝔅𝔟 (aγ, bβ, cα)
𝔅𝔠aβ, 𝔅𝔠bα,	- -	𝔅𝔠 (aβ, bα)
𝔅𝔡aα,	- -	𝔅𝔡 (aα)
ℭ𝔞aγ, ℭ𝔞bβ, ℭ𝔞cα,	- -	ℭ𝔞 (aγ, bβ, cα)
ℭ𝔟aβ, ℭ𝔟bα,	- -	ℭ𝔟 (aβ, bα)
ℭ𝔠aα,	- -	ℭ𝔠 (aα)
𝔇𝔞aβ, 𝔇𝔞aα,	- -	𝔇𝔞 (aβ, aα)
𝔇𝔟aα,	- -	𝔇𝔟 (aα)
𝔈𝔞aα,	- -	𝔈𝔞 (aα)

Man vergleiche S. 331. Die in (H*) nach 𝔄𝔞 folgenden, vertical unter einander stehenden (𝔄𝔟 + 𝔅𝔞) und (𝔄𝔠 + 𝔅𝔟 + ℭ𝔞) u. s. w. mit ihren Nebenfactoren, geben die Formel durch lauter zweyte Classen (128. S. 286).

Tafel IV., Fortsetzung.

Coefficienten von Producten gegebener Reihen, durch willkührliche Producte der einzelnen ausgedrückt

Für p q r s t u v w x y = p . q r . s t u . v w x y kämen folgende Reihen (118) mit den überschriebenen Zeigerzahlen

$$\overset{1}{\alpha} + \overset{2}{\beta} x + \overset{3}{\gamma} x^2 + \overset{4\ldots\ldots}{\delta} x^3 + \text{etc.} = M$$

$$\overset{rq}{{}^2B} + \overset{rq}{{}^3B} x + \overset{rq}{{}^4B} x^2 + \overset{rq}{{}^5B} x^3 + \text{etc.} = N$$

$$\overset{uts}{{}^3C} + \overset{uts}{{}^4C} x + \overset{uts}{{}^5C} x^2 + \overset{uts}{{}^6C} x^3 + \text{etc.} = O$$

$$\overset{yxwv}{{}^4D} + \overset{yxwv}{{}^5D} x + \overset{yxwv}{{}^6D} x^2 + \overset{yxwv}{{}^7D} x^3 + \text{etc.} = P$$

Die Reihen N, O, P sind von denen in (115) blos durch die Coefficienten verschieden, so, daſs statt der dortigen einzelnen Buchstaben, hier ganze Classen stehen, die also auch bey Formirung des Products M N O P statt jener einfachen Buchstaben zu setzen sind.

Das führt auf Producte von Classen und ihre Involution, wovon bereits in (131) beyläufig Erwähnung geschehen ist. Auf diesem Wege ergeben sich auch die aus der figürlichen Darstellung abgeleiteten Formeln (123, I, II; 124) und andere ähnliche, von aller figürlichen Anordnung unabhängig. Die combinatorischen Veränderungen führen oft auf solche Anordnungen, die nicht selten Veranlassung zu mannichfaltigen Beobachtugen über die Zusammensetzung der Gröſsen aus ihren Elementen geben (*Inf. Dign.* §. X. *p.* 17, 18, 19 *seq*). Die daraus abgeleiteten, besonders rein-combinatorischen, Darstellungen befolgen gewöhnlich die einfachsten und leichtesten Gesetze.

Vergleichung der derivativen und combinatorischen Entwickelung der Producte zweyer oder mehrerer Polynomien in Reihen.

Diese läſst sich hier, nach dem, was über jede besonders (S. 268 — 275 und S. 276 — 287, und in diesem Anhange Taf. IV) beygebracht worden ist, in der Kürze darstellen. Ein einziges Beyspiel wird darzu schon hinreichend seyn. Ich wähle hier das ARBOGASTISCHE (S. 278):

Das 5te Glied des Products der dortigen vier Polynomien, oder $\frac{D^4.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a\alpha)}{1.2.3.4}$, *unabhängig von den vorhergehenden Gliedern zu entwickeln.*

A) Durch analytische Derivationen.

1. Ein Glied des Products dieser Reihen zu entwickeln, muſs man die Werthe von $\frac{D^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\alpha)}{1.2..n}$ [109. S. 273], von $\frac{D^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}.a)}{1.2..n}$ [108. S. 272], und $\frac{D^n.(\mathfrak{A}.\mathfrak{a})}{1.2..n}$ [106. S. 270], vor Augen haben. Die Derivirten von einzelnen Buchstaben α, a, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{A}$, die hierbey mit vorkommen, machen keine Schwierigkeit. Es ist nähmlich $\frac{D^m.\alpha}{1.2..m} = \overset{m}{\alpha}$, dem mten Buchstaben nach α [105. S. 269]; und so auch bey den übrigen Buchstaben a, α, $\mathfrak{A}$, und andern.

2. Entwickelung von $\frac{D^4.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\alpha)}{1.2.3.4}$, wo also n (in 1) = 4.

I. Vermittelst der Formel für $\frac{D^n.(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\alpha)}{1.2..n}$ wird die gegebene Derivirte von $(\mathfrak{A}\mathfrak{a}a.\alpha)$ in Derivirte von

($\mathfrak{A}\alpha a$) und (α) zerlegt. Dies giebt eine **erste** Entwickelung (S. 275).

II. Durch die Formel für $\frac{D^n.(\mathfrak{A}\alpha.a)}{1.2..n}$ werden die Derivirten von ($\mathfrak{A}\alpha.a$), die (I) gegeben, weiter in Derivirte von ($\mathfrak{A}\alpha$) und (a) zerlegt. Diese geben, mit den zugehörigen Derivirten von (α) in (I), eine **zweyte** Entwickelung (Ebend.).

III. Durch die Formel für $D^n.(\mathfrak{A}.\alpha)$ werden eben so die Derivirten von ($\mathfrak{A}\alpha$), die (II) gegeben, weiter in Derivirte von ($\mathfrak{A}$) und (α) zerlegt. Diese geben, mit den zugehörigen Derivirten von (a) und (α) aus (II, I), eine **dritte** Entwickelung (Ebend.).

IV. Die Derivirten in (III), da sie sämmtlich einzelne Buchstaben betreffen, lassen sich augenblicklich auflösen (1), und so giebt die **vierte** Entwickelung das so genannte *Développement réduit* in Buchstaben (Ebend. der Werth für A_4, unten).

3. Man kann die Aehnlichkeit nicht verkennen, die das Verfahren (in 2) mit jenen ersten, zweyten, dritten, u. s. w. Entwickelungen der Polynomialgröſsen hat; auch lassen sich die successiven Zerlegungen der Glieder von Producten eben so in einer Tafel darstellen, wie die der Polynomialgröſsen bey Arbogast [*p.* 20, 21 und hier Taf. III]. Nur giebt es für die Glieder der Producte weit mehr verschiedene Zerlegungen, als für die Glieder der Potenzen, wo mehrere gleiche durch numerische Coefficienten zusammengenommen werden. Den Gang der Sache tabellarisch vorzulegen, um solchen mit der eben angeführten Tafel vergleichen zu können, will ich die successive Zerlegung einer Derivirten von einer **niedrigern Ordnung** z. B. $\frac{D^2.\ \mathfrak{A}\alpha a.\alpha)}{1.2}$ hier nachweisen; auch, zu Verkürzung im Schreiben, die Distanzexponenten dabey mit einführen (1).

$$\frac{D^2.(\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,a.\alpha)}{1.2} =$$

Erste Evolution *)	Zweyte Evolution **)	Dritte Evolution †)	Reducirte Evolution ††)
$= \mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,a.\overset{2}{\alpha}$	$= \mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,a\,\gamma$	$= \mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,a\,\gamma$	$= \mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,a\,\gamma$
$+ D^1.(\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,a).\overset{1}{\alpha}$	$+ \big\{ \mathfrak{A}\,\mathfrak{a}.\overset{1}{a}\,\beta$	$+ \mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,b\,\beta$	$+ \mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,a\,\beta$
	$D^1.(\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}).\overset{0}{a}\,\beta$	$+ \big\{ \mathfrak{A}.\overset{1}{\mathfrak{a}}\,a\,\beta$ $\overset{1}{\mathfrak{A}}.\overset{0}{\mathfrak{a}}\,a\,\beta$	$+ \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,a\,\beta$ $+ \mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,a\,\beta$
$=$	$\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}.\overset{2}{a}\,\alpha$ $=$	$+ \mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,c\,\alpha$ $=$	$+ \mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,c\,\alpha$
$+ \frac{D^2.(\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,a)}{1.2}.\overset{0}{\alpha}$	$+ D^1.(\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}).\overset{1}{a}\,\alpha$	$+ \big\{ \mathfrak{A}.\overset{1}{\mathfrak{a}}\,b\,\alpha$ $\overset{1}{\mathfrak{A}}.\overset{0}{\mathfrak{a}}\,b\,\alpha$	$+ \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}\,b\,\alpha$ $+ \mathfrak{B}\,\mathfrak{a}\,b\,\alpha$
	$\frac{D^2.(\mathfrak{A}\,\mathfrak{a})}{1.2}.\overset{0}{a}\,\alpha$	$+ \big\{ \mathfrak{A}.\overset{2}{\mathfrak{a}}.a\,\alpha$ $\overset{1}{\mathfrak{A}}.\overset{1}{\mathfrak{a}}.a\,\alpha$ $\overset{2}{\mathfrak{A}}.\overset{0}{\mathfrak{a}}.a\,\alpha$	$+ \mathfrak{A}\,\mathfrak{c}\,a\,\alpha$ $+ \mathfrak{B}\,\mathfrak{b}\,a\,\alpha$ $+ \mathfrak{C}\,\mathfrak{a}\,a\,\alpha$

*) Der gegebenen Derivirten von ($\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,a\,\alpha$) in Derivirte von $\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,a$ und α.

**) Der Derivirten von $\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}\,a$ (1ste Evol.) in Derivirte von $\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}$ und a.

†) Der Derivirten von $\mathfrak{A}\,\mathfrak{a}$ (2te Evol.) in Derivirte von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$.

††) Das so genannte *Développement réduit*, wo weiter kein Derivationszeichen oder Distanzexponent vorkommt.

4. Die lezte reducirte Evolution giebt hier die Glieder, wie sie für C (109) stehen, von meiner combinatorischen Darstellung (120) blos in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, verschieden. Man sehe die Bemerkungen zu Taf. IV. (S. 326), wo zugleich die wechselseitige Beziehung beyder Anordnungen nachgewiesen worden ist.

5. Die derivative Entwickelung von $\frac{D^4 . (\mathfrak{A}\, a\, a\, \alpha)}{1 . 2 . 3 . 4}$, wenn man sie von vorhergehenden niedrigern Derivirten von $\mathfrak{A}\, a\, a\, \alpha$ unabhängig darstellen soll, wie hier gefordert worden, ist verwickelt, ob sie schon (in 112) von Arbogast für leicht ausgegeben wird. Nämlich die Operationen, die man zu machen hat, sind nicht schwer, führen aber gleichwohl (wegen der als Vorbereitung nöthigen Zerlegungen der gegebenen $\frac{D^4 . (\mathfrak{A}\, a\, a\, \alpha)}{1 . 2 . 3 . 4}$, zu Derivirten von $\mathfrak{A}\, a\, a$ und α, und eben so der Derivirten von $\mathfrak{A}\, a\, a$ zu Derivirten von $\mathfrak{A}\, a$ und a) in Weiläuftigkeit, wie man (a. a. O. S. 2?5) ersehen kann. Hierzu kommt noch die Aufmerksamkeit, die man auf die Einschachtelungen (*emboîtemens*) zu verwenden hat, die schon (109) sind empfohlen worden, und allerdings zu Verkürzung des Vortrags das ihrige beytragen.

B) Durch ganz einfache Combinationen.

6. Die combinatorische Entwickelung von $\frac{D^4 . (\mathfrak{A}\, a\, a\, \alpha)}{1 . 2 . 3 . 4}$ (Taf. IV, G), deren erstes Glied $\mathfrak{A}\, a\, a\, \varepsilon$ ist, befolgt die (120) gegebene Regel, die ganz allgemein für jede Entwickelung jeder Derivirten gilt. Für hohe Derivirte und viel Buchstaben (d. i. für späte Glieder von Producten mehrerer Reihen) hat man nämlich die Regel nur öfter und weiter anzuwenden, sie bleibt aber immer in ihren Vorschriften einfach und in der Anwen-

dung leicht. Man hat nur mehr zu schreiben, weil das Ganze mehr Glieder hat; das Verfahren bleibt aber durchaus sich immer gleichförmig. Man hat nichts dabey, blos etwa als Vorbereitung zu schreiben, die nur dazu diente, die Entwickelung daraus abzuleiten (5); was man schreibt, gehört unmittelbar zur Sache selbst und macht einen Theil des Ganzen aus. Das Verfahren ist zum Theil stelegraphisch, und stellt die Glieder in lexikographischer Ordnung auf. Die gezogenen Winkel, bey diesen involutorischen Anordnungen, dienen, aufser der leichtern Ausübung der Regel, auch noch dazu: einmal, die Unionen, Binionen, Ternionen u. s. w. der weniger zusammengesezten Glieder aus weniger Reihen, als Evolutionen sogleich abzusondern und auszuheben; und dann auch, um die gemeinschaftlichen Factoren, die sich hier von selbst ergeben, sogleich zu übersehen, wofür (109) die Aufmerksamkeit auf die *Emboîtemens* empfohlen worden.

7. Das combinatorische Verfahren in (B) ist dem derivativen in (A) gerade entgegengesezt. Das leztere geht, von mehrbuchstäbigen Derivirten und ihren Zerlegungen, auf die Zerlegungen der successive wenigerbuchstäbigen Derivirten fort; das erstere sezt aus der zuerst gegebenen Union, die Bionen, aus diesen die Ternionen, aus diesen die Quaternionen u. s. w. von immer mehrern und mehrern Reihenbuchstaben, zusammen. Man wird keinen Augenblick anstehen, die combinatorisch-synthetische Auflösung (B), als die leichtere, der derivativ-analytischen (A) vorzuziehen. Vertauscht man in der reducirten Evolution der tabellarischen Vorstellung (3) die Alphabete α, a, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{a}$ a α und liest die so umgeformten Complexionen rückwärts von unten herauf, so hat man, aus der derivativen Darstellung der Glieder, auf einmal die stelegraphisch-lexikographische Anordnung (120 und Taf. IV.). Die Umtauschung ist nur nöthig,

wenn die Anfangscomplexion (wie in 120) 𝔄 a a γ seyn soll, sonst besteht auch die lexikographisch-combinatorische Darstellung, ohne jene Umtauschung, aber für die Anfangscomplexion x a a 𝔈 (Ebend.), die man eben so gut als 𝔄 a a γ zur Anfangscomplexion für das verlangte Glied hätte nehmen können.

So lassen sich auch, auf dergleichen Producte oder Potenzen der Reihen und ihre Glieder sich beziehende, zusammengesetztere derivative Functional-Ausdrücke und Sätze [*Calc. des Der.* p 46—68; 78—89] durch combinatorische Zeichnung in ihrer Entwickelung sehr erleichtern; die Auflösung von Aufgaben hingegen, deren Inhalt so ganz offenbar combinatorisch ist, wie die [a. a. O. no. 93] auf directen combinatorischen Wegen zugleich beträchtlich abkürzen. Die dort angebrachte für merkwürdig angegebene derivative Bezeichnung führt doch zu Weitläuftigkeiten, von denen die kurze, der Natur der Aufgabe angemessene, combinatorische Behandlung nichts weis. Auch wird man, bey etwas verwickelten Aufgaben und ihrer derivativen Behandlung, bestätiget finden, was ich bey einer andern Gelegenheit anderwärts schon erinnert habe, dafs man nämlich bey derivativen Vorschriften, die man nicht immer auszuüben Veranlassung hat, sehr oft einen grofsen Theil des Vorhergehenden aufmerksam überlesen mufs, ehe man mit Sicherheit zur Anwendung auf den vorkommenden Fall schreiten kann. Mit den combinatorischen Formen und Formeln hingegen, deren Einrichtung und Entwickelung man bald übersieht, und wenn man sie vergessen hätte, durch Nachlesung weniger Zeilen sich wieder erneuert, ist das nicht der Fall.

Tafel III.

Zwey derivativ-evolvirte und vollständig reducirte ARBOGASTISCHE Beyspiele [p. 20, 21].

(A) Erstes Schema; Evolution der Polynomialgröfse $\frac{D^5 . \beta^4}{1.2..5}$

$$\frac{D^5.\beta^4}{1.2..5} =$$

1ste Evolution, in γ

$$D\beta^4 . \frac{D^4.\gamma}{1.2.3.4} + \frac{D^2\beta^4}{1.2} . \frac{D^3.\gamma^2}{1.2.3} + \frac{D^3\beta^4}{1.2.3} . \frac{D^2.\gamma^3}{1.2} + \frac{D^4\beta^4}{1.2.3.4} . D.\gamma^4 =$$

2te Evolution, in δ

$$D\beta^4 . \frac{D^3.\delta}{1.2.3} + \frac{D^2\beta^4}{1.2} . \left\{ D\gamma^2 . \frac{D^2.\delta}{1.2} + \frac{D^2\gamma^2}{1.2} . D.\delta^2 \right. + \frac{D^3\beta^4}{1.2.3} . \left\{ D\gamma^3.D.\delta + \frac{D^2\gamma^3}{1.2} . \delta^2 \right. + \frac{D^4\beta^4}{1.2.3.4} . D\gamma^4.\delta =$$

3te Evolution, in ε

$$D\beta^4 . \frac{D^2.\varepsilon}{1.2} + \frac{D^2\beta^4}{1.2} . \left\{ D\gamma^2.D.\varepsilon + \frac{D^2\gamma^2}{1.2} . D\delta^2.\varepsilon \right. + \frac{D^3\beta^4}{1.2.3} . \left\{ D\gamma^3.\varepsilon + \frac{D^2\gamma^3}{1.2} . \delta^2 \right. + \frac{D^4\beta^4}{1.2.3.4} . D\gamma^4.\delta =$$

4te Evolution, in ζ

$$D\beta^4.D.\zeta + \frac{D^2\beta^4}{1.2} . \left\{ D\gamma^2.\zeta + \frac{D^2\gamma^2}{1.2} . D\delta^2.\varepsilon \right. + \frac{D^3\beta^4}{1.2.3} . \left\{ D\gamma^3.\varepsilon + \frac{D^2\gamma^3}{1.2} . \delta^2 \right. + \frac{D^4\beta^4}{1.2.3.4} . D\gamma^4.\delta =$$

5te Evolution, in η

$$D\beta^4.\eta \ldots + \frac{D^2\beta^4}{1.2} . \left\{ D\gamma^2.\zeta + \frac{D^2\gamma^2}{1.2} . D\delta^2.\varepsilon \right. \ldots + \frac{D^3\beta^4}{1.2.3} . \left\{ D\gamma^3.\varepsilon + \frac{D^2\gamma^3}{1.2} . \delta^2 \right. \ldots + \frac{D^4\beta^4}{1.2.3.4} . D\gamma^4.\delta \ldots =$$

reducirte Evolution

$$4\beta^3.\eta + 6\beta^2 \left\{ 2\gamma.\zeta + 2\delta.\varepsilon \right. + 4\beta \left\{ 3\gamma^2.\varepsilon + 3\gamma.\delta^2 \right. + 4\gamma^3.\delta$$

(B) Zweytes Schema; Evolution der Polynomialgröfse $\frac{D^6.\beta^4}{1.2..6}$

$$\frac{D^6.\beta^4}{1.2...6} =$$

1ste Evolution, in γ

$$D\beta^4 . \frac{D^5.\gamma}{1.2..5} + \frac{D^2\beta^4}{1.2} . \frac{D^4.\gamma^2}{1.2.3.4} + \frac{D^3\beta^4}{1.2.3} . \frac{D^3.\gamma^3}{1.2.3} + \frac{D^4\beta^4}{1.2.3.4} . \frac{D^2.\gamma^4}{1.2} =$$

2te Evolution, in δ

$$D\beta^4 . \frac{D^4.\delta}{1.2..4} + \frac{D^2\beta^4}{1.2} . \left\{ D\gamma^2 . \frac{D^3.\delta}{1.2.3} + \frac{D^2\gamma^2}{1.2} . \frac{D^2.\delta^2}{1.2} \right. + \frac{D^3\beta^4}{1.2.3} . \left\{ D\gamma^3 . \frac{D^2.\delta}{1.2} + \frac{D^2\gamma^3}{1.2} . D.\delta^2 + \frac{D^3\gamma^3}{1.2.3} . \delta^3 \right. + \frac{D^4\beta^4}{1.2.3.4} . \left\{ D\gamma^4.D.\delta + \frac{D^2\gamma^4}{1.2} . \delta^2 \right. =$$

3te Evolution, in ε

$$D\beta^4 . \frac{D^3.\varepsilon}{1.2.3} + \frac{D^2\beta^4}{1.2} . \left\{ D\gamma^2 . \frac{D^2.\varepsilon}{1.2} + \frac{D^2\gamma^2}{1.2} . \left\{ D\delta^2.D.\varepsilon + \frac{D^2\delta^2}{1.2} . \varepsilon^2 \right. \right. + \frac{D^3\beta^4}{1.2.3} . \left\{ D\gamma^3.D.\varepsilon + \frac{D^2\gamma^3}{1.2} . D\delta^2.\varepsilon + \frac{D^3\gamma^3}{1.2.3} . \delta^3 \right. + \frac{D^4\beta^4}{1.2.3.4} . \left\{ D\gamma^4.\varepsilon + \frac{D^2\gamma^4}{1.2} . \delta^2 \right. =$$

4te Evolution, in ζ

$$D\beta^4 . \frac{D^2.\zeta}{1.2} + \frac{D^2\beta^4}{1.2} . \left\{ D\gamma^2.D.\zeta + \frac{D^2\gamma^2}{1.2} . \left\{ D\delta^2.\zeta + \frac{D^2\delta^2}{1.2} . \varepsilon^2 \right. \right. + \frac{D^3\beta^4}{1.2.3} . \left\{ D\gamma^3.\zeta + \frac{D^2\gamma^3}{1.2} . D\delta^2.\varepsilon + \frac{D^3\gamma^3}{1.2.3} . \delta^3 \right. + \frac{D^4\beta^4}{1.2..4} . \left\{ D\gamma^4.\varepsilon + \frac{D^2\gamma^4}{1.2} . \delta^2 \right. =$$

5te Evolution, in η

$$D\beta^4.D.\eta + \frac{D^2\beta^4}{1.2} . \left\{ D\gamma^2.\eta + \frac{D^2\gamma^2}{1.2} . \left\{ D\delta^2.\zeta + \frac{D^2\delta^2}{1.2} . \varepsilon^2 \right. \right. + \frac{D^3\beta^4}{1.2.3} . \left\{ D\gamma^3.\zeta + \frac{D^2\gamma^3}{1.2} . D\delta^2.\varepsilon + \frac{D^3\gamma^3}{1.2.3} . \delta^3 \right. + \frac{D^4\beta^4}{1.2..4} . \left\{ D\gamma^4.\varepsilon + \frac{D^2\gamma^4}{1.2} . \delta^2 \right. =$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots =$$

reducirte Evolution

$$4\beta^3.\theta + 6\beta^2 \left\{ 2\gamma.\eta + 2\delta.\zeta + \varepsilon^2 \right. + 4\beta \left\{ 3\gamma^2.\zeta + 3\gamma.2\delta.\varepsilon + \delta^3 \right. + 4\gamma^3.\varepsilon + 6\gamma^2.\delta^2$$

*) Die 6ste hier übergangene Evolution ist von der 5ten nur im ersten Gliede unterschieden.

L'auteur de la partie française n'ayant pu surveiller la correction il s'y est glissé des fautes, dont voici les plus graves.

Pag. 5 ligne 12 de bas en haut, attaque, lisez attaqua
— 7 — 14 idem des, — les
— 11 — 17 idem pleindre, — plaindre
— 15 — 10 idem $z\Delta x^m . \Delta x^n$, — $z\Delta x^m . \Delta y^n$
— 17 ligne derniere

$$\frac{x^n}{a} + \frac{x^n}{b} + \frac{x^n}{c} + \text{etc.} \quad \text{lisez} \quad \frac{x^m}{a} + \frac{x^n}{b} + \frac{x^t}{c} + \text{etc.}$$

— 23 ligne 13 inhérens, lisez incohérens
— 24 — 16 de b. en h. le, — les
11 idem connus, — inconnus
— 30 — 11 idem des, — de
— 48 — 5 idem

$$\frac{x}{A+} \frac{x}{B+} \frac{x}{C+} \quad \text{lisez} \quad \frac{x}{A+} \frac{x-1}{B+} \frac{x-2}{C+}$$

— 50 ligne 5 de b. en h. des, lisez de
— 52 — 11 qu', — qui
— 55 — 4 de b. en h. et de, — et l'expédient de
— 56 — 11 differentiel, — différentiée
— 62 — 7 de b. en h. un d', — un
— 70 — 9 idem souvant, — souvent
— 82 — 12 idem adopté, — adoptée
— 92 — 10 jusques et compris 15. Pour corriger le déplacement, lisez $= 1 + \overset{q}{X} + \overset{q}{X^2} + \overset{q}{X^3} + +$, d'où l'on tire en mettant les séries de $\overset{q}{X}, \overset{q}{X^2}$, etc., et comparant
— 101 — 12 qu', lisez qui
— 128 — 10 complications, — complication
— 129 — 13 J'euse, — J'eusse

Je ne m'arrête pas aux accens, ni aux moindres fautes.

Zu den deutschen Anmerkungen und der darauf folgenden Abhandlung.

Seite 137, Zeile 13, von unten, statt *Polynomiorum per Series*, lies *Polynomiorum Evolutionem per Series*

S. 141, Note, Z. 3, v. u. st. Zahlencolonne, l. Zahlencolonnen

— 147, Z. 23, 24, st. au- eine, l. auf eine

Ebend. Z. 34, 35, st. verrschiedenen, l. verschieden

S. 153, Z. 4, v. u. st. combinatorischen, l. combinatorische

— 154, Z. 21, st. erleichtert Der .*ocus*, l. erleichtert; Der *locus*

— 159, Z. 5, v. u. st. 2 4 18 6 . . ., l. 2, 4, 8, 16 . . .

— 160, Z. 3, v. u. st. $n - 4$, l. $n - 4$, und

— 162, Z. 17, st. $n - 4$, l. $n - 4'$

— 181, Z. 2, v. u. st. $\text{D}.\text{F}\alpha. = \text{D}.\alpha$, l. $\text{D}.\text{F}\alpha.\text{D}.\alpha$

— 184, Z. 6, v. u. st. $\text{D}^2.\varphi\alpha$, l. $\text{D}^2\varphi\alpha$

— 187, Z. 3, st. $1\ 2.3\delta$, l. $1.2.3\delta$

— 190, Z. 2, st. $\text{D}.\varphi\alpha$, l. $\text{D}.\varphi\alpha$,

— 193, Z. 10, nach $\frac{m.m-1}{1:2}$, fehlt α^{m-2}

— 201, Z. 3, v. u. st. $\alpha^{-}.\zeta$, l. $\alpha^{-1}.\zeta$

— 219, Z. 4, v. u. st. $\left(\frac{\text{D}^n.\varphi\alpha}{1.2..n}\right) = \frac{\text{D}\varphi\alpha}{1}$ l.

$$\left(\frac{\text{D}^n.\varphi\alpha}{1.2..n}\right) x^n = \left(\frac{\text{D}\varphi\alpha}{1}\right.$$

— 231, Z. 1, v. u. st. $\begin{pmatrix}\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots \\ 1, 3, 3, 4 \ldots\end{pmatrix}$ l. $\begin{pmatrix}\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots \\ 1, 2, 3, 4 \ldots\end{pmatrix}$

— 235, Z. 12, st. $5\beta^2.[2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon$, l. $6.\beta^2[2\gamma\zeta + 2\delta\varepsilon]$

Ebend. Z. 13. st. $+\gamma^3\delta$, l. $+4\gamma^3\delta$

S. 237, Z. 7, v. u. st. $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, l. $\alpha, \beta, \gamma \ldots \theta$

Ebend. Z. 20, st. derivaiive, l. derivative

S. 259, Z. 4, und S. 360, Z. 2, v. u. sollten statt der geradestehenden Π, schiefliegende gesezt seyn, dergleichen aber in der Druckerey nicht vorhanden waren.

— 267, Z. 10, st. $q^{s+g}x(n+1)$, l. $q^{f+g}x(n+1)$

Ebend. Z. 15, st. der unendlichen, l. der endlichen

S. 273, Z. 5, st. D.(𝔄a a, l. D.(𝔄aa)

— 275, Z. 5, v. u. st. 𝔄a, l. 𝔅a und Z. 4, v. u. st. ab, l. 𝔄b

— 284, Z. 14, st. gezahlt, l. gezählt

Im Bogen T sind aus Versehen, von Seite 295 an bis mit Seite 304, die schiefstehenden Variationsclassenbuchstaben *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* . . *M* . . *P*, *Q* statt der geradestehenden Combinationsclassenbuchstaben A, B, C, D, E, F . . . M . . . P, Q gesetzt worden.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hindenburg, Carl Friedrich, 1741-1808

Über combinatorische Analysis und Derivations-Calcul einige Fragmente

Leipzig 1803

Math.p. 221
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082015-0